Esfuerzo normal

I. Romero
ETSI Industriales, Universidad Politécnica de Madrid
ignacio.romero@upm.es

5 de octubre de 2016

En este capítulo se estudian la respuesta mecánica de barras (o de forma más precisa barras rectas) sometidas a esfuerzo normal. Este análisis consiste en calcular cuáles son las tensiones que provocan estos esfuerzos, así como las deformaciones que originan. Además, se incluirán los efectos que se derivan de un cambio de temperatura en estos sólidos pues, como se verá más adelante, están muy relacionadas con los del esfuerzo normal.

Cuando una barra se encuentra sometida a un esfuerzo normal igual para todas sus secciones se dice que está a ***tracción*** o ***compresión pura***. Este caso es muy habitual y se puede demostrar que ocurre en barras bi-articuladas, rectas cuando las únicas fuerzas que sufren están aplicadas sobre sus extremos.

1. Tensiones en barras sometidas a esfuerzo normal

Cuando una barra recta está sometida a esfuerzo normal, las tensiones en cada una de sus secciones debidas a este esfuerzo son sólo normales a ésta y de valor

$$\sigma = \frac{N}{A} \tag{1}$$

siendo N y A, respectivamente el esfuerzo normal y el área de la sección. Si la sección de la barra es de sección constante, entonces se puede demostrar que la fórmula 1 es exacta; si la sección de la barra cambia suavemente, la expresión es muy precisa; en un cambio de sección brusco esta fórmula no es válida y aparece concentración de tensiones.

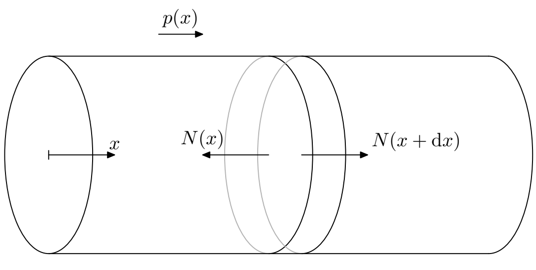

Figura 1: Barra recta sometida a esfuerzo normal

2. Equilibrio

Para poder expresar analíticamente el estado de esfuerzos en una barra es imprescindible caracterizar con un signo, positivo o negativo, el sentido del esfuerzo en una tensión. Para ello tomamos el convenio de que esfuerzos normales de tracción (salientes de una sección) son positivos, y los de compresión (entrantes) son negativos.

Consideremos una barra recta y un sistema de coordenadas en uno de sus extremos de forma que la coordenada x coincida con la directriz. Si esta barra está sometida a una fuerza por unidad de superficie $p = p(x)$ en dirección y sentido del eje x, la ecuación diferencial que expresa el equilibrio de la barra es

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} + p = 0 \ . \tag{2}$$

3. Deformación

En el sistema de coordenadas definido sobre la barra, la tensiones σ tienen la dirección del eje x y por tanto hay deformaciones longitudinales y transversales. La deformación longitudinal $\varepsilon = \sigma/E$ y por tanto

$$\varepsilon(x) = \frac{N(x)}{E(x)A(x)} \ . \tag{3}$$

La cantidad EA en el denominador se conoce como la ***rigidez axial de la sección***.

Se consideran ahora dos secciones, las correspondientes a las coordenadas x_a y x_b. El alargamiento del segmento comprendido entre estas dos secciones será

$$\Delta\ell_{ab} = \int_{x_a}^{x_b} \varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_a}^{x_b} \frac{N(x)}{E(x)A(x)}\,\mathrm{d}x \ . \tag{4}$$

Habitualmente, lo más interesante es calcular el incremento de longitud total de una barra de longitud inicial ℓ que llamamos simplemente $\Delta\ell$. En el caso de que la rigidez axial sea constante este incremento es

$$\Delta\ell = \frac{N\ell}{EA} \ . \tag{5}$$

4. Energía

Supongamos que una barra elástica está sometida a esfuerzo normal $N = N(x)$ y tiene una rigidez axial $EA(x)$. Esta barra, en general, puede estar sometida a cargas p por unidad de longitud en dirección y sentido de la directriz y dos cargas puntuales en sus extremos que denominamos P_1 y P_2 con dirección y sentido del eje x. Las ecuaciones del equilibrio de esta barra son (2) y

$$N(x_1) = -P_1, \qquad N(x_2) = P_2 \ . \tag{6}$$

El trabajo que hacen todas las fuerzas sobre la barra cuando ésta sufre un desplazamiento $u = u(x)$ es, según el teorema de Clapeyron:

$$W = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} p(x)\, u(x)\, \mathrm{d}x - \frac{1}{2}P_1 u(x_1) + \frac{1}{2}P_2 u(x_2) \ . \tag{7}$$

Utilizando la ecuación del equilibrio en el interior de la barra para reemplazar la carga distribuida en la integral por la (menos) derivada del esfuerzo normal, integrando por partes y utilizando las relaciones (6) se sigue que

$$W = \int_{x_1}^{x_2} \frac{N(x)}{2}\, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\, \mathrm{d}x \ . \tag{8}$$

Como $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ es igual a la deformación ε utilizamos la expresión (4), se sigue que el trabajo realizado por las fuerzas exteriores es

$$W = \int_{x_1}^{x_2} \frac{N^2(x)}{2EA(x)}\, \mathrm{d}x. \tag{9}$$

Como en una barra elásticas todo el trabajo se almacena en forma de energía, concluimos que la ***energía elástica almacenada debido al esfuerzo normal*** es

$$U = \int_{x_1}^{x_2} \frac{N^2(x)}{2EA(x)}\, \mathrm{d}x. \tag{10}$$

5. Efectos térmicos y de montaje

En el caso de barras rectas, es habitual considerar los efectos que sobre ellas causan los saltos de temperatura y también los excesos (falta) de longitud debido a los errores en fabricación o montaje. Si la barra es de un material con coeficiente de dilatación térmica α y ha sido fabricada con una longitud δ mayor que su longitud nominal, su deformación longitudinal será

$$\varepsilon(x) = \frac{N(X)}{E(x)A(x)} + \alpha\ \Delta T + \frac{\delta}{\ell} \ . \tag{11}$$

En el caso de la que barra esté a tracción o compresión pura y la rigidez axial de sus secciones sea constante, su alargamiento total será

$$\Delta\ell = \frac{N\ell}{EA} + \alpha\ \Delta T\ell + \delta \ , \tag{12}$$

donde ΔT es el incremento de temperatura respecto de una temperatura de referencia, donde se ha medido la longitud nominal de la barra.

Se puede demostrar, con un razonamiento algo más complejo que el de la sección 4, que en el caso de una barra con deformación por temperatura y por defecto de forma, su energía elástica es

$$U = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{N^2(x)}{2EA(x)} + N(x)(\alpha\Delta T + \frac{\delta}{L}) \right) \mathrm{d}x. \tag{13}$$