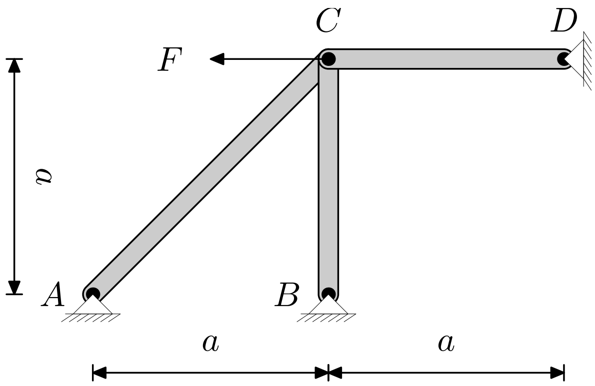
E.T.S.I. Industriales — Ampliación de Resistencia de Materiales

Curso 2017/18, PEC 3 — Fecha: 25/10/2017

Nombre y apellidos: — N$^{\text{O}}$ de matrícula:

---

1 La estructura de la figura está formada por tres barras articuladas de sección A, material con módulo de Young E y coeficiente de dilatación térmica α. Si la barra BC sufre un incremento de temperatura θ, y hay una fuerza horizontal aplicada en C y de valor F,



i) Determinar todas las reacciones.

ii) Calcular los esfuerzos en las barras.

iii) Encontrar el desplazamiento *horizontal* del punto C.

Solución: Es una estructura hiperestática de grado 1. Suponiendo conocido el esfuerzo de tracción N_{BC}, que lo llamamos R, los esfuerzos *de tracción* en el resto de barras son:

$$N_{AC} = -R\sqrt{2}\ , \qquad N_{CD} = F - R,$$

La energía interna del conjunto es

$$U(F,R) = \frac{(R\sqrt{2})^2 a\sqrt{2}}{2EA} + \frac{R^2 a}{2EA} + \frac{(F-R)^2 a}{2EA} + R\theta\alpha a,$$

Para encontrar el valor de la reacción hiperestática utilizamos la relación

$$0 = \frac{\partial U}{\partial R} = \frac{R\sqrt{2}a2}{EA} + \frac{Ra}{EA} + \theta\alpha a - \frac{(F-R)a}{EA},$$

que, tras despejar R, resulta en

$$R = \frac{F - \theta\alpha EA}{2(1+\sqrt{2})},$$

Una vez conocido el valor de R, la energía interna se puede escribir en función únicamente de la carga F. De esta manera $U = \tilde{U}(F) = U(F, R(F))$. Por el segundo teorema de Castigliano,

$$\delta = \frac{\mathrm{d}\,\tilde{U}}{\mathrm{d}\,F} = \frac{\partial U}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial F} + \frac{\partial U}{\partial F}\,,$$

Sin embargo, para el cálculo de R habíamos empleado la relación $\frac{\partial U}{\partial R} = 0$ así que $\frac{\mathrm{d}\tilde{U}}{\mathrm{d}F} = \frac{\partial U}{\partial F}$, y por tanto

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{(F-R)a}{EA} = \frac{a}{EA\,2(1+\sqrt{2})}((1+2\sqrt{2})F + \alpha\theta EA),$$

2 Una viga biapoyada de longitud 3 m está sometida a una carga concentrada, vertical y hacia abajo en el centro de vano, y de valor $P = 3000$ N. Si la viga tiene un perfil HEB120 de acero, está reforzado por dos tablas de madera, arriba y abajo, de anchura 120 mm y espesor 30 mm,

i) Dibujar la sección equivalente de madera.

ii) Calcular la inercia de la sección equivalente de madera.

iii) Determinar las tensiones normales máximas en la madera y en acero.

iv) Indicar cuál sería el máximo valor admisible de P.

(Datos: $E_a = 210$ GPa, $\sigma_a^{adm} = 200$ MPa, $E_m = 21$ GPa, $\sigma_m^{adm} = 30$ MPa).

3 Una viga de longitud 2,5 m está empotrada en uno de sus extremos y sometida, en el otro, a un par torsor $M = 3000$ N·m. Seleccionar los perfiles IPN y cuadrado hueco más ligeros con los que la viga no plastificaría y el giro relativo entre los extremos sería menor o igual que 5^o. (Datos $G = 90$ GPa, $\tau_{adm} = 100$ MPa)

Problema 2

Una viga biapoyada de longitud 3 m está sometida a una carga concentrada, vertical y hacia abajo en el centro de vano, y de valor P = 3000 N.Si la viga tiene un perfil HEB120 de acero, está reforzado por dos tablas de madera, arriba y abajo, de anchura 120 mm y espesor 30 mm,

Dibujar la sección equivalente de madera.
Calcular la inercia de la sección equivalente de madera.
Determinar las tensiones normales máximas en la madera y en acero.
Indicar cuál sería el máximo valor admisible de P.
(Datos : E_a = 210 GPa, σ_a{adm} = 200 MPa, E_m = 21 GPa, σ_m{adm} = 30 MPa).

Datos

Módulos de Young y tensiones admisibles del acero y la madera (en MPa)

```
In[1]:= Ea = 210 × 10^3;
        Em = 21 × 10^3;
        σa = 200;
        σm = 15;
```

Carga y dimensiones (N y mm)

```
In[5]:= P = 3000;
        L = 3000;
```

Inercia de la sección transformada en madera (mm^4)

```
In[17]:= na = Ea / Em;
         nm = Em / Em;

         Inerciaa = na 864 × 10^4
         Inerciam = 2 (1 / 12 × 120 × 30^3 + 120 × 30 (60 + 15)^2)
         Inercia = Inerciaa + Inerciam

Out[19]= 86 400 000

Out[20]= 41 040 000

Out[21]= 127 440 000
```

Tensiones máximas (en MPa)

In[25]:=
```
Mmax = P L / 4;
```
$$\sigma maxa = \frac{Mmax}{Inercia} 60.\, na$$
$$\sigma maxm = \frac{Mmax}{Inercia} 90.\, nm$$

Out[26]= 10.5932

Out[27]= 1.58898

Valor admisible de P (en N)

El valor máximo admisible de la carga P si se hace fallar el acero o la madera

In[28]:=
$$Pmaxa = \frac{P}{\sigma maxa} \sigma a$$
$$Pmaxm = \frac{P}{\sigma maxm} \sigma m$$

Out[28]= 56 640.

Out[29]= 28 320.

El máximo valor admisible es el menor de las cargas que hacen fallar la sección

In[30]:=
```
Pmax = Min[Pmaxa, Pmaxm]
```

Out[30]= 28 320.

Problema 3

Una viga de longitud 2.5 m está empotrada en uno de sus extremos y sometida, en el otro, a un par torsor M=3000 N·m. Seleccionar los perfiles IPN y cuadrado hueco más ligeros con los que la viga no plastificaría y el giro relativo entre los extremos sería menor o igual que 5°. (Datos G=90 GPa, τadm = 100 MPa)

Datos (mm, N, rad)

In[1]:=
```
L = 2500;
M = 3 × 10 ^ 6;
τadm = 100;
θ = 5 Pi / 180.;
G = 90 × 10 ^ 3;
```

Valores mínimos de la sección

El giro máximo en cualquier viga sometida a torsión pura es θ = ML/(G It), y la tensión máxima τ = Mt/Wt. Por lo tanto, para cualquier sección, su rigidez a torsión It (mm^4) y su módulo resistente Wt (mm^3) han de ser mayor o igual a los siguiente valores

In[6]:=
```
Itmin = M L / (G θ)
```
Out[6]=
```
954 930.
```

In[7]:=
```
Wtmin = M / τadm
```
Out[7]=
```
30 000
```

Perfil IPN (abierto ramificado)

Según las tablas el IPN 360 tiene It=1.23 10^6 mm^4. El módulo resistente a torsión Wt es :

In[8]:=
```
It = 1.23 × 10 ^ 6;
emax = 13;
Wt = It / emax;
τmax = M / Wt
```
Out[11]=
```
31.7073
```

Perfil cuadrado hueco

Entre todos los perfiles cuadrados huecos con It>=100 cm^4, el más ligero es el #80.3

In[12]:=
```
It = 140 × 10^4;
emin = 3;
Astar = (80. - 3)^2;
Wt = 2 Astar emin
```

Out[15]= 35 574.

In[16]:=
```
τmax = M / Wt
```

Out[16]= 84.3313

Con esto concluimos que el pefil cuadrado #80.3 es válido.