

Energía

Ignacio Romero
ignacio.romero@upm.es

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales
Universidad Politécnica de Madrid

Curso 2017/18

① Trabajo

② Teoremas

Concepto

- El trabajo se define sólo para procesos:

$$W = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{u}$$

- Notación de termodinámica $\delta W = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{u}$
- No existe dW .

Teorema de Clapeyron

Si se aplica un sistema de fuerzas $\{\mathbf{F}_i\}$ sobre un **sistema elástico**, y éste sufre unas desplazamientos $\{\mathbf{u}_i\}$, el trabajo total realizado es

$$W = \sum_i \frac{1}{2} \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{u}_i$$

1. También es válido para pares y momentos.
2. Es independiente del proceso, y por tanto del orden de aplicación de las fuerzas.
3. Si una vez aplicadas unas fuerzas, se aplica otra más $\bar{\mathbf{F}}$, el trabajo adicional es

$$\Delta W = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{u}} + \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{u}_i$$

Desplazamiento eficaz

Se define el desplazamiento eficaz bajo una fuerza \mathbf{F} a la proyección del desplazamiento sobre la línea de acción de \mathbf{F} , es decir,

$$\delta = \mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{F}}{|\mathbf{F}|}$$

Cuando se aplica un sistema de fuerzas, el trabajo total se puede reescribir como

$$W = \sum_i \frac{1}{2} F_i \delta_i$$

Energía

- En un **sistema elástico**, todo el trabajo aplicado se almacena en energía elástica, recuperable.
- La energía es la función

$$U(\{\delta_j\}) = \frac{1}{2} \sum_i F_i(\{\delta_j\}) \delta_i$$

- La energía complementaria es la función

$$U^*(\{F_j\}) = \frac{1}{2} \sum_i F_i \delta_i(\{F_j\})$$

Teorema de Maxwell-Betti

Consideramos una estructura elástica sobre el que se aplican dos sistemas de fuerzas $\{F_i\}$ y $\{\bar{F}_i\}$ completamente independientes. Si los desplazamientos efectivos debidos a estas fuerzas son, respectivamente, $\{\delta_i\}$ y $\{\bar{\delta}_i\}$, entonces

$$\sum_i \frac{1}{2} F_i \bar{\delta}_i = \sum_i \frac{1}{2} \bar{F}_i \delta_i$$

Es decir, los trabajos recíprocos son iguales.

Teoremas de Castigliano

- Primer teorema de Castigliano:

$$F_i = \frac{\partial U(\{\delta_j\})}{\partial \delta_i}$$

- Segundo teorema de Castigliano:

$$\delta_i = \frac{\partial U^*(\{F_j\})}{\partial F_i}$$

Observaciones:

- ▷ También son válidos para giros y pares.
- ▷ Se pueden emplear con efectos térmicos y de defecto de montaje.

Energía

Ignacio Romero
`ignacio.romero@upm.es`

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales
Universidad Politécnica de Madrid

Curso 2017/18