

Torsión de barras

Ignacio Romero
ignacio.romero@upm.es

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales
Universidad Politécnica de Madrid

Curso 2017/18

- 1 Definiciones
- 2 Teoría de Coulomb
- 3 Teoría de Saint Venant
- 4 Secciones de pared delgada



Definiciones

- Una sección de un sólido prismático está sometida a torsión cuando la componente x del momento interno, que llamamos M_t , es no nula.
- Si un sólido prismático está sometido a $M_t = \text{constante}$ y el resto de esfuerzos son nulos, decimos que está a **torsión pura**.

1. Teoría de Coulomb

Tensión y equilibrio

Las tensiones sobre una sección debidas al momento torsor son

$$\tau = \frac{M_t}{I_o} r$$

Ecuación del equilibrio:

$$\frac{dM_t(x)}{dx} + m(x) = 0$$

Deformación

La medida de deformación relevante para una barra sometida a torsión es el **giro alrededor de la directriz por unidad de longitud**

$$\vartheta(x) = \frac{d\theta(x)}{dx}$$

Una barra **recta** sometida a torsión experimenta un giro total

$$\theta - \theta_o = \int_0^{\ell} \vartheta(x) dx$$

Si y sólo si ϑ es constante

$$\vartheta = \frac{\theta - \theta_o}{\ell}$$

Relación constitutiva

Una sección de momento polar de inercia I_o , material con módulo de cortante G , sometida a un momento torsor M_t

$$\vartheta = \frac{M_t}{GI_o}$$

La cantidad GI_o es la **rigidez a torsión de la sección**.

Si una barra está sometida a torsión pura y tiene sección homogénea entonces

$$\theta - \theta_o = \frac{M_t \ell}{GI_o}$$

La cantidad GI_o/ℓ es la **rigidez a torsión de la barra**.

Energía

Energía de una barra sometida a torsión

$$U = \int_0^{\ell} \frac{M_t^2}{2GI_o} dx$$

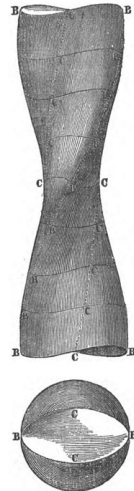
Si la barra está sometida a torsión pura y la rigidez a torsión de la sección es constante

$$U = \frac{M_t^2 \ell}{2GI_o}$$

2. Teoría de Saint Venant

Clasificación

1. Secciones circulares (macizas o huecas) → **Teoría de Coulomb** (sin alabeo)
2. Alabeo, pero el mismo para todas las secciones → **Teoría de Saint Venant**
3. Alabeo, y distinto para todas las secciones → **Torsión no uniforme**



Teoría de la torsión de Saint Venant

En este modelo las secciones **no permanecen planas** (se alabean), girando alrededor de un punto y alabeándose todas por igual.

Saint Venant demostró que el albeo se puede calcular exactamente:

$u_z = \vartheta \psi(y, z)$, siendo ψ la función de albeo que satisface

$$\Delta\psi = 0 \quad \text{en } \mathcal{S}, \quad (\psi_{,y} - z)n_y + (\psi_{,z} + y)n_z = 0 \quad \text{en } \partial\mathcal{S},$$

y el giro por unidad de longitud ϑ satisface

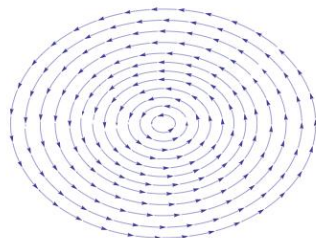
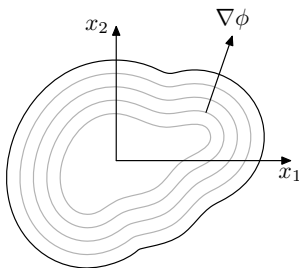
$$\vartheta = \frac{M_t}{GI_t}, \quad I_t = \int_{\mathcal{S}} (y^2 + z^2 + y\psi_{,z} - z\psi_{,y}) \, dS$$

Teoría de Prandtl

Si se encuentra la función de Prandtl ϕ que satisface

$$-\Delta\phi = 2G\vartheta \quad \text{en } \mathcal{S}, \quad \vartheta = \text{constante en } \partial\mathcal{S}$$

se puede demostrar que $|\boldsymbol{\tau}| = |\nabla\phi|$ y $\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla\phi = 0$.



Analogías

Las líneas de nivel de la función de Prandtl son idénticas a:

1. las líneas de corriente de un **fluido incompresible**, invíscido circulando en una cavidad \mathcal{S}
2. Las líneas de nivel del **campo eléctrico** en un dieléctrico sometido a carga distribuida con el contorno a un potencial fijo.
3. Las líneas de nivel de **temperatura** de un material sometido a un aporte de calor por unidad de área y con el contorno a temperatura fija
4. Las líneas de nivel de una **membrana**, sujeta por el contorno, y soplada con una presión fija.

Sección rectangular

Para la sección rectangular de dimensiones $a \times b$,

$$I_t = \beta b a^3, \quad W_t = \alpha b a^2$$

siendo

$$\vartheta = \frac{M_t}{GI_t}, \quad \tau_{\text{máx}} = \frac{M_t}{W_t}$$

(I_t : inercia a torsión, W_t : módulo resistente a torsión) y las constantes:

b/a	1	3	10	∞
α	0.208	0.267	0.312	0.333
β	0.141	0.263	0.312	0.333

Para una sección con $a \ll b$,

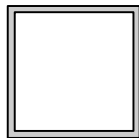
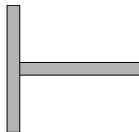
$$I_t = \frac{1}{3} b a^3, \quad W_t = \frac{1}{3} b a^2$$

3. Secciones de pared delgada

Torsión de secciones de pared delgada

Clasificación:

- Abiertas
 - ▷ Ramificadas
 - ▷ Sin ramificar
- Cerradas
 - ▷ De una celda
 - ▷ De varas celdas



En todos los casos:

$$\vartheta = \frac{M_t}{GI_t}, \quad \tau_{\text{máx}} = \frac{M_t}{W_t}$$

Secciones abiertas, sin ramificar

La función de Prandtl no cambia casi nada respecto a la de la sección rectangular delgada.

Si tiene espesor e y longitud s ,

$$I_t = \frac{1}{3} s e^3, \quad W_t = \frac{1}{3} s e^2$$

Dibujo de la distribución de tensiones

Secciones abiertas, ramificadas

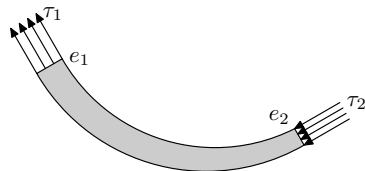
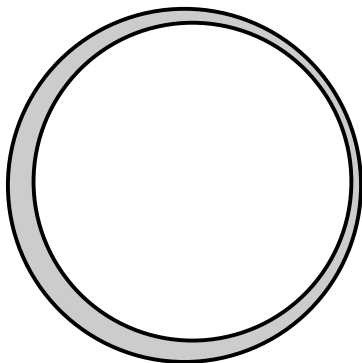
La función de Prandtl no cambia casi nada respecto a la de la sección rectangular delgada, excepto en las bifurcaciones.

Suponemos que el par torsor se reparte entre las ramas y que el giro es común

$$I_t = \sum_i \frac{1}{3} s_i e_i^3, \quad W_t = \frac{I_t}{\text{máx}_i e_i}$$

Secciones cerradas de una celda

El flujo de cortante $q = \tau e$ es constante



$$W_t = 2A_* e_{\text{mín}} , \quad I_t = \frac{4 A_*^2}{\oint \frac{d\ell}{e}}$$