Energía elástica

Ampliación de Resistencia de Materiales, curso 2016/17

En Resistencia de Materiales se demostró que en un cuerpo *elástico*, la energía almacenada después de aplicar fuerzas $\boldsymbol{F}_i, i = 1, \dots, N$ se podía calcular como

$$W = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{u}_i \ , \tag{1}$$

siendo $\boldsymbol{u}_i$ el desplazamiento bajo el punto de aplicación de la carga al final de la aplicación de *todas* ellas.

En un medio continuo, la energía elástica total se puede calcular como la integral de un *densidad de energía elástica* w de la forma

$$W = \int_\Omega w \ \mathrm{d}v \ . \tag{2}$$

La densidad de energía elástica, que es la energía de un diferencial de volumen, se puede obtener extendiendo la definición (1). Para ello, consideramos un paralelepípedo diferencial, con aristas de longitud $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$, paralelas a los ejes coordenados. Cuando este volumen diferencial está sometido a un estado tensional totalmente general, las *fuerzas* sobre sus caras son $\pm\sigma_x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z, \pm\tau_{xy} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z, \pm\tau_{xz} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z, \pm\sigma_y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}z, \dots$. Además, los desplazamientos relativos de las caras serán $\varepsilon_x \,\mathrm{d}x, \varepsilon_y \,\mathrm{d}y, \dots$ y los giros relativos $\gamma_{xy}, \dots$. Por tanto, la energía del paralelepípedo será

$$w \,\mathrm{d}v = \frac{1}{2} \left(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}\right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z \ . \tag{3}$$

Empleando la ley de Hooke generalizada es sencillo obtener una expresión de la densidad de energía elástica en función de las tensiones únicamente:

$$w = \frac{1}{2E} \left[\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - 2\nu(\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\sigma_{zz})\right] + \frac{1}{2G} \left[\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2\right] \ . \tag{4}$$

También se puede expresar la densidad energía elástica únicamente en función de las deformaciones resultando en

$$w = \lambda \left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}\right)^2 + G \left(2\varepsilon_{xx}^2 + 2\varepsilon_{yy}^2 + 2\varepsilon_{zz}^2 + \gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2\right) \ , \tag{5}$$

siendo λ y G las constantes de Lamé

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \ , \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \ . \tag{6}$$

Por último, observamos que ambas expresiones para la densidad de energía elástica se pueden escribir de forma más compacta si empleamos la base principal de tensión y deformación, resultando en:

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2E}\left[{\sigma_I}^2 + {\sigma_{II}}^2 + {\sigma_{III}}^2 - 2\nu(\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_I\sigma_{III} + \sigma_{II}\sigma_{III})\right] \\ &= \lambda\left(\varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III}\right)^2 + 2G\left({\varepsilon_I}^2 + {\varepsilon_{II}}^2 + {\varepsilon_{III}}^2\right) \ . \end{aligned} \tag{7}$$