

---

# Apuntes de Mecánica de Medios Continuos

---

**Ignacio Romero Olleros**  
Abril 15, 2005



*En este documento se recoge un proyecto en curso de redacción de apuntes para la asignatura de Mecánica de Medios Continuos. Es por tanto un documento inacabado, donde únicamente se tratan la mitad de los capítulos del temario. Se ha estimado, sin embargo, que, a pesar de su estado, esta colección de apuntes proporciona una clara perspectiva del curso que se define en el proyecto docente de esta habilitación.*

*También se han recogido algunos ejercicios en cada capítulo. Estos ejercicios han sido propuestos en la docencia o en los exámenes del curso de Mecánica de Medios Continuos de tercero de Ingeniería Geóloga, en la titulación de la Universidad Politécnica de Madrid.*



# Índice

<b>Capítulo 1. Álgebra y cálculo tensorial</b> .....	<b>1</b>
<b>1. Resumen de cálculo indicial</b> .....	<b>1</b>
<b>2. Ejercicios propuestos</b> .....	<b>6</b>
<b>Capítulo 2. Cinemática de medios continuos</b> .....	<b>9</b>
<b>1. Los cuerpos continuos y sus configuraciones</b> .....	<b>9</b>
<b>2. El campo de deformación de un medio continuo</b> .....	<b>11</b>
<b>3. El gradiente de deformación</b> .....	<b>14</b>
3.1. Descomposición polar del gradiente de deformaciones.....	15
<b>4. Medidas locales de deformación</b> .....	<b>15</b>
<b>5. Transformación de longitud, superficie y volumen</b> .....	<b>17</b>
5.1. Transformación de longitud y ángulo.....	18
5.2. Transformación de área.....	19
5.3. Transformación de volumen.....	19
<b>6. Deformaciones de sólido rígido</b> .....	<b>20</b>
<b>7. Deformaciones homogéneas</b> .....	<b>21</b>
<b>8. Deformaciones infinitesimales</b> .....	<b>22</b>
8.1. Deformaciones infinitesimales rígidas.....	23
8.2. Cambio de volumen.....	24
8.3. Deformación desviadora y volumétrica.....	24
8.4. Transformación de longitud y ángulo en una deformación infinitesimal.....	25
<b>9. Ecuaciones de compatibilidad</b> .....	<b>26</b>
<b>10. Movimientos en tiempo. Trayectoria</b> .....	<b>27</b>
<b>11. Descripción material y espacial</b> .....	<b>27</b>
<b>12. Velocidad y aceleración</b> .....	<b>28</b>
<b>13. Ejercicios propuestos</b> .....	<b>29</b>

<b>Capítulo 4. Leyes de balance y conservación . . . . .</b>	<b>33</b>
1. Introducción . . . . .	33
2. Curvas, superficies y volúmenes materiales . . . . .	34
3. Curvas, superficies y volúmenes de control . . . . .	37
4. Balance de masa . . . . .	37
5. Balance de cantidad de movimiento . . . . .	41
6. Balance de momento cinético . . . . .	43
7. Balance de energía . . . . .	46
8. La segunda ley de la termodinámica . . . . .	51
9. Ejercicios propuestos . . . . .	53
<b>Capítulo 5. Modelos constitutivos . . . . .</b>	<b>57</b>
1. Introducción . . . . .	57
2. Principios generales de los modelos constitutivos . . . . .	58
3. El principio de invariancia . . . . .	59
4. Modelos constitutivos reducidos . . . . .	61
5. Simetrías . . . . .	62
6. Clasificación de los modelos constitutivos . . . . .	62
7. Modelos constitutivos de sólidos elásticos . . . . .	63
<b>Capítulo 10. Mecánica de fluidos . . . . .</b>	<b>67</b>
1. Introducción . . . . .	67
2. Cinemática . . . . .	68
3. Resumen de las ecuaciones de la Mecánica de Fluidos . . . . .	71
4. Fluidos perfectos . . . . .	71
5. Fluidos newtonianos . . . . .	75
6. Fluidos no newtonianos . . . . .	78
7. Hidrostática . . . . .	78
8. Condiciones de contorno en fluidos . . . . .	80
<b>Bibliografía . . . . .</b>	<b>83</b>

# Capítulo 1

## Álgebra y cálculo tensorial

---

### 1. Resumen de cálculo indicial

En Mecánica de Medios Continuos los objetos matemáticos más empleados son los escalares, vectores y tensores en  $\mathbb{R}^3$ . Para trabajar con vectores se define una base de vectores ortonormales  $\mathcal{B}^1 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  de forma que todo vector  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  se puede expresar como la siguiente combinación lineal

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3 . \quad (1.1.1)$$

Utilizando sumatorios se puede escribir la ecuación previa de una forma más compacta:

$$\mathbf{v} = \sum_{p=1}^3 v_p\mathbf{e}_p . \quad (1.1.2)$$

Sin embargo es tedioso tener que escribir constantemente el símbolo de sumatorio e indicar sus límites, pues siempre son los mismos. Por ello se adopta la siguiente convención: en vez de (1.1.1) o (1.1.2) se escribe

$$\mathbf{v} = v_p\mathbf{e}_p . \quad (1.1.3)$$

En esta expresión, y en toda aquella en la que dos objetos que se multiplican tengan un mismo índice repetido, se entenderá que  $v_p\mathbf{e}_p$  significa  $v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$ . En vez del subíndice  $p$  se

podría haber empleado cualquier otro, y así

$$v_p \mathbf{e}_p = v_q \mathbf{e}_q = v_i \mathbf{e}_i , \quad (1.1.4)$$

por lo que el índice repetido se denomina “mudo”. Se dice que la expresión (1.1.3) emplea notación indicial o también el convenio de Einstein.

Dos vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son iguales si  $a_p \mathbf{e}_p = b_p \mathbf{e}_p$ . Esta igualdad se puede reescribir como  $(a_p - b_p) \mathbf{e}_p = 0$ . Como los vectores de la base son linealmente independientes la última expresión requiere que cada componente se anule, es decir,  $a_p - b_p = 0$ , o de otra manera

$$a_p = b_p . \quad (1.1.5)$$

De este simple ejemplo se deduce que cuando en una igualdad aparezca un mismo índice en varios lugares, pero no multiplicándose, quiere decir que la igualdad es válida cuando el índice toma el valor 1,2 ó 3. Por ejemplo, la identidad (1.1.5) quiere expresar

$$\begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases} \quad (1.1.6)$$

Nótese que en la identidad anterior (1.1.5) *no hay ningún índice repetido*, pues aunque  $p$  aparezca en ambos lados de la igualdad las componentes correspondientes no están multiplicando.

Cuando se trabaja con tensores de segundo orden también se emplea una base tensorial de nueve tensores:

$$\mathcal{B}^2 = \{ \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \} , \quad (1.1.7)$$

y todo tensor  $\mathbf{T}$  se puede escribir como

$$\mathbf{T} = T_{11} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + T_{12} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + T_{13} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + T_{21} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + \dots \quad (1.1.8)$$

En este caso se observa aún más claramente que resulta muy tedioso escribir y trabajar con las nueve componentes de un tensor. Se podría escribir la expresión previa como

$$\mathbf{T} = \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 T_{pq} \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q , \quad (1.1.9)$$

pero igual que con los vectores, se adopta la convención de que esta última expresión se puede escribir simplemente como

$$\mathbf{T} = T_{pq} \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q . \quad (1.1.10)$$

Como en el caso de los vectores, los índices repetidos cuyos objetos correspondientes se multiplican expresan un sumatorio, con dicho índice tomando valores 1,2 y 3.

También como en el caso de los vectores, aquellos índices libres que aparecen repetidos en varios lugares de una igualdad, pero cuyas componentes correspondientes no se multiplican indican que la igualdad es válida cuando los índices toman valores 1,2 y 3. Así por ejemplo



$T_{ij} + R_{ij} = 7$  quiere decir que la suma de cualquier componente del tensor  $\mathbf{T}$  de segundo orden más la misma componente del tensor de segundo orden  $\mathbf{R}$  es igual a 7.

Las consideraciones aquí presentadas son válidas también para tensores de mayor orden. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} A_{ijk}v_j &= A_{i1k}v_1 + A_{i2k}v_2 + A_{i3k}v_3 , \\ S_{pqr}T_{ir} &= S_{pq1}T_{i1} + S_{pq2}T_{i2} + S_{pq3}T_{i3} . \end{aligned} \tag{1.1.11}$$

## Empleo de notación indicial en igualdades

Cuando se expresan igualdades de cantidades vectoriales o tensoriales se puede emplear notación compacta, indicial o matricial. De esta manera, por ejemplo, la igualdad de dos tensores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  se puede indicar de cualquiera de estas tres maneras:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} , \quad \Leftrightarrow \quad A_{ij} = B_{ij} , \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} .$$

Sin embargo **no es correcto** escribir:

$$\mathbf{A} = B_{ij} , \quad \text{ni} \quad A_{ij} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} , \quad \text{ni tampoco} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} .$$

Otro ejemplo: si el vector  $\mathbf{t}$  viene definido por  $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}$  donde  $\boldsymbol{\sigma}$  es un tensor de segundo orden  $\mathbf{n}$  un vector, entonces podemos reescribir dicha definición de cualquiera de estas maneras:

$$\begin{aligned} t_i &= \sigma_{ij}n_j , \\ t_i\mathbf{e}_i &= \sigma_{ij}n_j\mathbf{e}_i , \\ \{\mathbf{t}\} &= [\boldsymbol{\sigma}]\{\mathbf{n}\} , \\ \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} . \end{aligned}$$

Sin embargo, es incorrecto escribir:

$$\mathbf{t} = \sigma_{ij}n_j , \quad \text{y también} \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} .$$

## Cuadro resumen

En el siguiente cuadro se resumen las operaciones más comunes en álgebra y cálculo tensorial y sus expresiones en notación indicial. En toda la tabla  $\phi$  es una función escalar,  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  son vectores y  $\mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{T}$  son tensores de orden dos.

Operación	Notación tensorial	Notación indicial
Igualdad de vectores	$\mathbf{a} = \mathbf{b}$	$a_p = b_p$
Igualdad de tensores	$\mathbf{T} = \mathbf{S}$	$T_{pq} = S_{pq}$
Delta de Kronecker	$\begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$	$\delta_{ij}$
Tensor de permutación	$\begin{cases} 1 & \text{si } ijk = 123, 231 \text{ ó } 321 \\ -1 & \text{si } ijk = 213, 132 \text{ ó } 312 \\ 0 & \text{si hay algún índice repetido.} \end{cases}$	$\epsilon_{ijk}$
Producto escalar	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	$a_p b_p$
Producto vectorial	$\mathbf{a} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$	$a_i = \epsilon_{ipq} b_p c_q$
Suma de vectores	$\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$	$a_i = b_i + c_i$
Suma de tensores	$\mathbf{R} = \mathbf{S} + \mathbf{T}$	$R_{ij} = S_{ij} + T_{ij}$
Producto tensor, vector	$\mathbf{b} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}$	$b_i = T_{ip} a_p$
Producto tensor trans., vector	$\mathbf{b} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{a}$	$b_i = T_{pi} a_p$
Producto tensor, tensor	$\mathbf{R} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{T}$	$R_{ij} = S_{ip} T_{pj}$
Producto externo	$\mathbf{T} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$	$T_{ij} = a_i b_j$
Doble contracción	$\mathbf{S} : \mathbf{T}$	$S_{pq} T_{pq}$
Traza de un tensor	$\text{tr}(\mathbf{T})$	$T_{pp}$
Determinante	$\det(\mathbf{T})$	$\epsilon_{ijk} T_{1i} T_{2j} T_{3k}$
Gradiente de f. escalar	$\mathbf{a} = \text{grad}[\phi]$	$a_i = \phi_{,i}$
Gradiente de f. vector	$\mathbf{T} = \text{grad}[\mathbf{a}]$	$T_{ij} = a_{i,j}$
Divergencia de un vector	$\phi = \text{div}[\mathbf{a}]$	$\phi = a_{i,i}$
Divergencia de un tensor	$\mathbf{a} = \text{div}[\mathbf{T}]$	$a_i = T_{ip,p}$
Rotacional de un vector	$\mathbf{b} = \text{rot}[\mathbf{a}]$	$b_i = \epsilon_{ijk} a_{j,k}$

## Resumen de reglas prácticas de operación indicial

- Un índice, por ejemplo  $p$ , repetido en una multiplicación, indica un sumatorio  $\sum_{p=1}^3$  de los términos en la multiplicación:

$$a_p b_p = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 .$$

- El par de índices repetidos y multiplicándose se pueden cambiar de letra, siempre que no se utilice en otra parte de la expresión:

$$a_p b_p + c_k = a_q b_q + c_k = a_r b_r + c_k .$$

- Cuando uno de los índices repetidos en una multiplicación pertenece al una delta de Kronecker basta con reemplazar el índice repetido por el índice libre en la delta:

$$a_{ip} \delta_{pj} = a_{ij} .$$

- Un índice que está repetido, pero no entre los factores que se multiplican, no se sustituye por un sumatorio

$$b_i + c_i \neq b_1 + c_1 + b_2 + c_2 + b_3 + c_3 .$$

- Uno o más índices libres (que no están multiplicados por otros factores que tengan esos mismos índices) indican 3 ecuaciones independientes por cada índice:

$$v_i = a_i + 3 \Rightarrow \begin{cases} v_1 = a_1 + 3 \\ v_2 = a_2 + 3 \\ v_3 = a_3 + 3 \end{cases}$$

- Un índice **nunca** puede aparecer repetido más de una vez en una multiplicación. Puede aparecer más de dos veces si es en sumandos distintos, pero no es recomendable pues puede llevar a confusión:

$$v_i S_{pi} W_{ji} \Rightarrow \text{Incorrecto !!}$$

$$v_i S_{pi} W_{jk} + a_i b_i \Rightarrow \text{Correcto, pero no recomendable}$$

$$v_i S_{pi} W_{jk} + a_m b_m \Rightarrow \text{Correcto}$$

- Un tensor ortogonal es aquel que tiene la propiedad  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{1}$ . En índices:

$$A_{ip} A_{jp} = A_{pi} A_{pj} = \delta_{ij}$$

## 2. Ejercicios propuestos

1.1 Sea una base ortonormal a derechas  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ . Se pide:

- 1) Demostrar que los vectores  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$  y  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$  son ortogonales.

- 2) Determinar una nueva base  $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$  de forma que  $\mathbf{g}_1$  y  $\mathbf{g}_2$  lleven las direcciones de  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  respectivamente, y esta nueva base forme un triedro ortonormal a derechas.
- 3) Determinar la matriz de transformación que permite obtener la nueva base, mediante los coeficientes  $\mathbf{g}_i = \mathbf{e}_p A_{pi}$ .
- 4) Determinar la relación matricial de cambio de coordenadas,  $\{\mathbf{v}\}_g = [\mathbf{A}]^T \{\mathbf{v}\}_e$ .

**1.2** Sean los vectores  $\{\mathbf{u}\} = (1, 2, 0)^T$ ,  $\{\mathbf{v}\} = (0, 1, 1)^T$ , definidos mediante sus coordenadas en una base ortonormal a derechas. Se pide:

- 1) Obtener su producto escalar y vectorial.
- 2) Se realiza un cambio de base consistente en una rotación de  $+45^\circ$  alrededor del eje  $z(=x_3)$ ; obtener la matriz de cambio de coordenadas  $[\mathbf{A}]^T$ , así como las nuevas coordenadas de los vectores  $\{\mathbf{u}'\}$  y  $\{\mathbf{v}'\}$ .
- 3) Comprobar que el producto escalar calculado con las nuevas componentes se conserva.
- 4) Comprobar que las las coordenadas del producto vectorial en la base nueva corresponden a las antiguas aplicando  $[\mathbf{A}]^T$ .

**1.3** Se define un cambio de coordenadas mediante una rotación de ángulo  $\theta$  alrededor del eje  $x$ . Se pide:

- 1) Obtener la matriz de cambio de coordenadas  $[\mathbf{A}] = [A_{ij}]$  mediante la aplicación de la fórmula  $A_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j$ .
- 2) Comprobar que la matriz así obtenida es ortogonal.
- 3) Demostrar que  $[\mathbf{A}]^n$  corresponde a una rotación de ángulo  $n\theta$ .

**1.4** Demostrar las siguientes identidades empleando notación indicial:

- 1) Si  $\mathbf{S}$  es un tensor simétrico y  $\mathbf{H}$  un tensor hemisimétrico,  $\mathbf{S} : \mathbf{H} = 0$ .
- 2)  $\nabla \wedge (\nabla \phi) = 0$ , para toda función escalar  $\phi$ .
- 3)  $\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{a}) = 0$ , para todo vector  $\mathbf{a}$ .
- 4)  $(A_{ijk} + A_{jki} + A_{jik})v_i v_j v_k = 3A_{ijk}v_i v_j v_k$ , para todo tensor de tercer orden  $\mathbf{A}$  y todo vector  $\mathbf{v}$ .
- 5)  $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ , siendo  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  vectores.
- 6)  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{a}} = 0$ , para cualquier vector  $\mathbf{a}$ .
- 7)  $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{1}$ , siendo  $\mathbf{n}$  un vector unitario.

**1.5** Sea una base ortonormal a derechas  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ . Se pide:

- 1) Sea  $\mathbf{S}$  un tensor simétrico con descomposición espectral:

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i .$$

Comprobar que el tensor

$$\sqrt{\mathbf{S}} = \sum_{i=1}^3 \sqrt{\lambda_i} \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i$$

es realmente la raíz cuadrada de  $\mathbf{S}$ , es decir, que  $\sqrt{\mathbf{S}} \cdot \sqrt{\mathbf{S}} = \mathbf{S}$ .

- 2) Sea  $\mathbf{S}$  un tensor simétrico y  $\mathbf{T}$  un tensor cualquiera. Demostrar que:

$$\mathbf{S} : \mathbf{T} = \mathbf{S} : \text{sim}(\mathbf{T}) .$$

- 3) Sean  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{T}$  dos tensores cualesquiera. Demostrar que:

$$\mathbf{U} : \mathbf{T} = \text{sim}(\mathbf{U}) : \text{sim}(\mathbf{T}) + \text{hem}(\mathbf{U}) : \text{hem}(\mathbf{T}) .$$

- 4) Sea  $\mathbf{F}$  un tensor con  $\det \mathbf{F} > 0$ . Demostrar que  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$  es simétrico, definido positivo.

**1.6** Sea  $\widehat{\mathbf{W}}$  un tensor hemisimétrico:

- 1) Demostrar que para todo vector  $\mathbf{a}$ ,

$$\mathbf{a} \cdot \widehat{\mathbf{W}} \cdot \mathbf{a} = 0 .$$

- 2) De la expresión anterior se deduce que el tensor  $\widehat{\mathbf{W}}$  tiene al menos un autovalor nulo. Sea  $\mathbf{u}$  su autovector asociado y  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  otros dos vectores que forman una base orthonormal a derechas  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$  junto con el autovector. Demostrar que  $\widehat{\mathbf{W}}$  ha de ser de la forma

$$\widehat{\mathbf{W}} = (\mathbf{w} \cdot \widehat{\mathbf{W}} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{w} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) .$$

- 3) Demostrar que el vector axial de  $\widehat{\mathbf{W}}$  es precisamente

$$\mathbf{W} = (\mathbf{w} \cdot \widehat{\mathbf{W}} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} .$$

**1.7** (Difícil) Demostrar la siguiente identidad relacionada con el tensor de permutación:

$$\epsilon_{pij}\epsilon_{pkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk} .$$

(Pista: usar la propiedad  $\epsilon_{ijk} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k = \det([\mathbf{e}_i \ \mathbf{e}_j \ \mathbf{e}_k])$ . En palabras,  $\epsilon_{ijk}$  es igual al determinante de una matriz cuyas columnas son los tres vectores  $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k$ .)

# Capítulo 2

## Cinemática de medios continuos

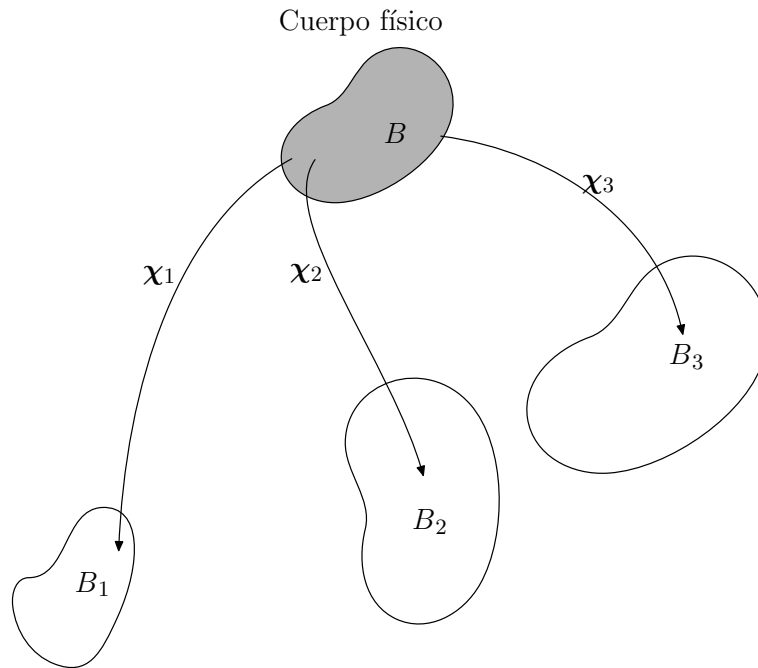
---

Este capítulo trata de la descripción cinemática de las deformaciones y movimientos de los cuerpos continuos. El punto de vista que se adopta en la Mecánica de Medios Continuos es el de estudiar estos movimientos en su mayor generalidad posible, sin las restricciones características de teorías como la elasticidad clásica. El punto de partida para esta descripción es la definición precisa de lo que se entiende por “cuerpo continuo” desde el punto de vista matemático. Este formalismo ha permitido describir de forma unificada una gran cantidad de cuerpos físicos de gran utilidad en ingeniería y se discute en la introducción.

Los conceptos de la cinemática pertenecen fundamentalmente a la geometría, y más concretamente a la geometría diferencial. La metodología y el formalismo presentados en este capítulo permitirán describir de forma cuantitativa no sólo los movimientos de los sólidos deformables sino también sus deformaciones locales. Esta generalidad permitirá, cuando se estudie las leyes de balance y los modelos constitutivos, plantear completamente las ecuaciones que rigen el movimiento de una gran variedad de cuerpos deformables.

### 1. Los cuerpos continuos y sus configuraciones

La Mecánica de Medios Continuos tiene como objeto último el estudio matemático de problemas mecánicos que involucran cuerpos físicos. Para poder describir matemáticamente



**Figura 2.1.1:** Un cuerpo continuo y algunas de sus posibles configuraciones.

dichos cuerpos es necesario definir de forma precisa qué se entiende por “cuerpo” y delimitar cuáles son los cuerpos que pueden ser estudiados en esta disciplina.

Los cuerpos físicos están formados por moléculas y éstas por átomos. Si se observa un cuerpo cualquiera, sólido o líquido, a través de un microscopio potente se aprecia que los átomos se encuentran separados unos de otros. De manera informal se podría decir que, vistos de cerca, los cuerpos físicos se asemejan conjuntos de bolas que se disponen de manera más o menos regular, pero espaciada. En otras palabras, a nivel atómico, la materia es *discontinua*. Sin embargo, si se observa un cuerpo a simple vista, o con un microscopio menos potente, parece sin embargo que la materia que lo conforma es *continua*.

Aunque sabemos que la materia no es continua, podemos suponer, para su estudio, que lo es. Esto es claramente una aproximación, pero si los problemas que interesa analizar involucran cuerpos cuyas dimensiones son mucho mayores que los átomos, la aproximación es muy buena. Esta aproximación es la *hipótesis de partida* de la Mecánica de Medios Continuos. Resulta enormemente útil pues permite resolver (aproximadamente) un gran número de problemas prácticos apoyándose en herramientas de cálculo integral y diferencial. Hay que resaltar otra vez que se trata de una aproximación muy buena para problemas cotidianos pero deja de ser válida a escala atómica.

Matemáticamente un *cuerpo continuo* se define como un conjunto  $\mathcal{B}$  de partículas, denominadas  $P_1, P_2, \dots$ , con una propiedad especial: existe un conjunto de aplicaciones biyectivas y diferenciables  $\mathcal{K} = \{\chi\}$  que transforman  $\mathcal{B}$  en conjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^3$ . Es



decir, para toda partícula  $P \in \mathcal{B}$

$$\mathbf{x} = \chi(P) \in \mathbb{R}^3, \quad \chi(\mathcal{B}) = \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^3, \text{abierto}, \quad \text{y} \quad \chi^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{B}, \quad (2.1.1)$$

y además, para cualesquiera dos aplicaciones  $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{K}$  la composición

$$\varphi_{12} : \chi_1(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \chi_2(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{R}^3, \quad \varphi_{12} = \chi_2 \circ \chi_1^{-1} \quad (2.1.2)$$

es diferenciable. Cada una de estas infinitas aplicaciones  $\chi$  se llama una *configuración*.

La definición anterior quiere indicar que cada partícula del cuerpo se puede asociar a un punto de  $\mathcal{O}$ , un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ , y viceversa. Como  $\mathbb{R}^3$  no tiene “agujeros” (es continuo), la definición anterior implica la continuidad de la materia que constituye  $\mathcal{B}$ , como indica la hipótesis fundamental de la Mecánica de Medios Continuos.

En la definición anterior se indica claramente que existe un número infinito de configuraciones posibles para el cuerpo  $\mathcal{B}$ . De entre todas ellas, elegimos una que llamamos  $\chi_{ref}$  y denominamos *configuración de referencia*. Esta configuración se llama así porque va a permitir referenciar cómodamente cada partícula  $P \in \mathcal{B}$  como se indica a continuación: es incómodo denominar  $P_1, P_2, P_3, \dots$  a cada partícula del cuerpo  $\mathcal{B}$ . Sin embargo, la configuración de referencia define una relación biunívoca entre las partículas del cuerpo y los puntos de un cierto conjunto abierto  $\mathcal{B}_{ref} := \chi_{ref}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{R}^3$ . Por ello, dado un sistema de coordenadas cualquiera para  $\mathbb{R}^3$ , a cada partícula  $P$  del cuerpo le corresponde un único trío de coordenadas  $(X_1, X_2, X_3)$ , y viceversa. Aunque son cosas distintas, se pueden identificar partículas del cuerpo con puntos de  $\mathcal{B}_{ref} \in \mathbb{R}^3$ . Cada trío  $(X_1, X_2, X_3)$  es, en cierto modo, el “nombre” de una partícula  $P$  del cuerpo y se denomina coordenadas *materiales* del punto  $P$ . Aunque la configuración de referencia puede ser cualquiera, resulta conveniente emplear como tal la correspondiente al cuerpo sin deformar, la llamada *configuración sin deformar*. Hay que subrayar que, en general, son conceptos distintos.

El problema básico de la Mecánica de Medios Continuos consiste en estudiar las causas y los efectos que hacen que un cuerpo cuya configuración de referencia es  $\chi_{ref}$  se transforme hasta situarse en una configuración deformada  $\chi_{def}$ . Por ejemplo, una cuerda sujeta entre dos puntos tiene una configuración de referencia tal que  $\mathcal{B}_{ref} = \chi_{ref}\mathcal{B}$  que coincide con una recta entre los dos puntos que la sujetan y una configuración deformada tal que  $\mathcal{B}_{def} = \chi_{def}(\mathcal{B})$  es una cicloide que pasa por dicho puntos.

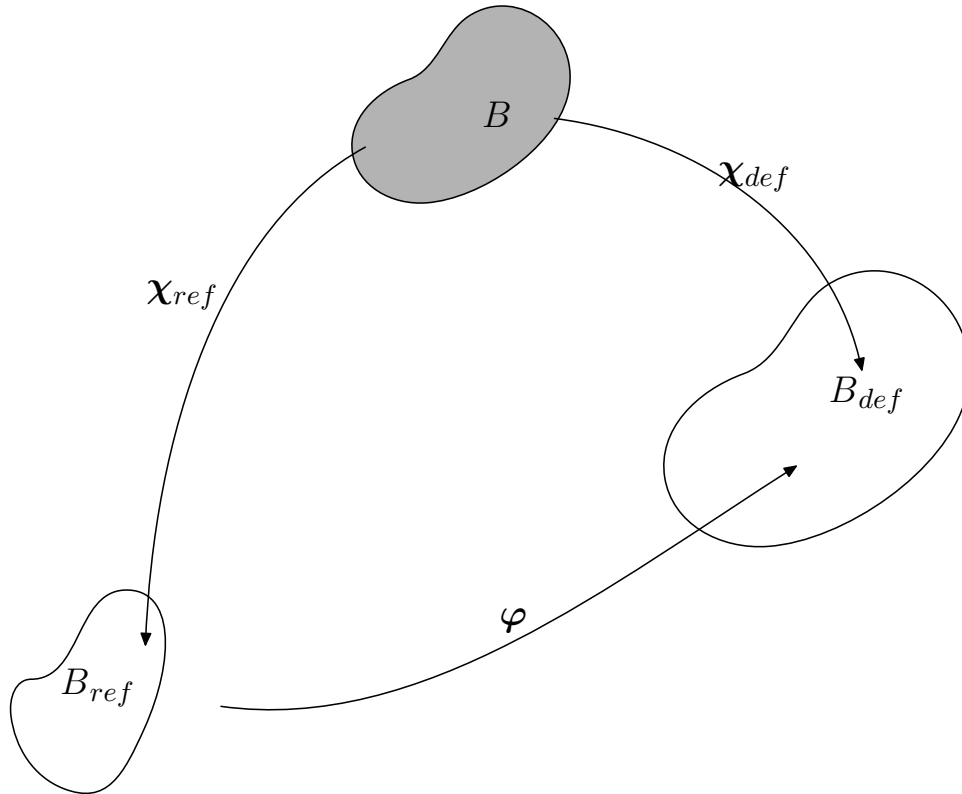
Para concluir esta sección indicamos que es corriente utilizar la expresión “configuración” para referirse al conjunto imagen de una de ellas, es decir,  $\chi(\mathcal{B})$ . Siendo conscientes de ello, su uso está tan extendido que no se considera incorrecto.

## 2. El campo de deformación de un medio continuo

Las configuraciones de referencia y deformada definen una aplicación entre  $\mathcal{B}_{ref}$  y  $\mathcal{B}_{def}$  que se denomina *deformación*:

$$\varphi : \mathcal{B}_{ref} \rightarrow \mathcal{B}_{def}, \quad \varphi := \chi_{def} \circ \chi_{ref}^{-1}. \quad (2.2.1)$$

La deformación es una función que opera entre conjuntos de  $\mathbb{R}^3$  y es muy útil, pues hace innecesario referirse constantemente al cuerpo físico  $\mathcal{B}$ . De hecho, aunque hayamos definido



**Figura 2.2.1:** El campo de deformación de un medio continuo.

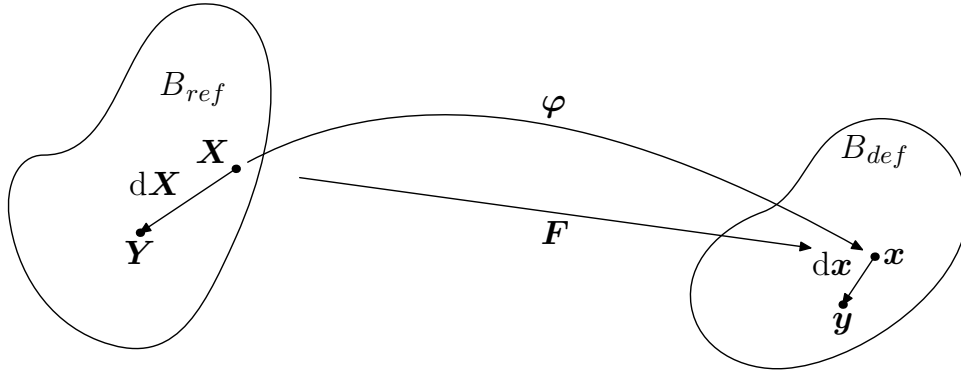
previamente el concepto de cuerpo y de configuraciones, la deformación es el concepto más importante para el tratamiento matemático de la cinemática de medios continuos. A partir de ahora no volveremos a emplear configuraciones ni conjuntos abstractos de puntos sino subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$  y aplicaciones entre ellos, es decir, deformaciones. Es sobre estas últimas sobre las que podemos aplicar el cálculo diferencial e integral usual, pues es simplemente el cálculo en  $\mathbb{R}^3$ .

Se supondrá a partir de ahora que se tiene un sistema de coordenadas cartesiano en  $\mathbb{R}^3$  de forma que cada punto  $x \in \mathbb{R}^3$  con coordenadas cartesianas  $(x_1, x_2, x_3)$  se puede identificar con su vector de posición  $\mathbf{x}$

$$x \mapsto \mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 . \quad (2.2.2)$$

Es importante recalcar que esta identificación sólo es posible con las coordenadas cartesianas. Por ello la deformación  $\varphi$  definida en (2.2.1) se puede considerar como una función vectorial de variable vectorial. Si indicamos con letras mayúsculas a las posiciones iniciales de los puntos materiales y con letras minúsculas a sus posiciones en la configuración deformada, podremos escribir

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}) , \quad \mathbf{X} \in \mathcal{B}_{ref} \quad (2.2.3)$$



**Figura 2.2.2:** Definición geométrica del gradiente de deformación

o empleando notación indicial y coordenadas cartesianas

$$x_i = \varphi_i(X_1, X_2, X_3), \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.2.4)$$

La deformación es el objeto cinemático fundamental pues proporciona la posición de cada partícula de cuerpo (identificada con su posición en  $\mathcal{B}_{ref}$ ). En la mayoría de los problemas mecánicos esta función no se conoce y la resolución de dicho problema consiste en hallar dicha función a partir de las fuerzas exteriores aplicadas. En este capítulo, sin embargo, supondremos que  $\varphi$  es conocida y deduciremos a partir de ella otras cantidades cinemáticas de interés.

Las funciones  $\varphi$  que definen los campos de deformación de los medios continuos pueden ser muy variadas pero existen varias restricciones que han de cumplir. En primer lugar, como composición de dos configuraciones, han de ser funciones diferenciables. En segundo lugar han de ser *inyectivas*. Esto quiere decir que si  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  son dos puntos distintos de la configuración de referencia entonces  $\varphi(\mathbf{X}) \neq \varphi(\mathbf{Y})$ . Lo que indica esta condición es que dos puntos no pueden deformarse de forma que acaben en la misma posición pues la materia es siempre impenetrable.

Resulta útil referirse también al campo de *desplazamientos*, especialmente para la teoría de deformaciones infinitesimales. Este campo se define de la siguiente manera:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) := \varphi(\mathbf{X}) - \mathbf{X} = \mathbf{x} - \mathbf{X}. \quad (2.2.5)$$

La interpretación geométrica de este campo es que representa el vector que une las posiciones sin deformar y deformada de cada partícula.

### 3. El gradiente de deformación

El primer objeto derivado de la deformación es el *gradiente de deformación*, un tensor de segundo orden definido como

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial X_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j . \quad (2.3.1)$$

Este objeto es el segundo objeto más importante de la cinemática de medios continuos pues define la relación entre elementos diferenciales de la configuración sin deformar y los de la deformada. Más concretamente, si  $d\mathbf{X}$  es un vector diferencial situado en el punto  $\mathbf{X}$  de la configuración de referencia y  $d\mathbf{x}$  es el vector que resulta de la deformación de  $d\mathbf{X}$  se cumple que

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} . \quad (2.3.2)$$

Para demostrarlo, considérense dos puntos  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{Y}$  muy próximos en la configuración de referencia tal que  $\mathbf{Y} = \mathbf{X} + d\mathbf{X}$ . Después de la deformación  $\boldsymbol{\varphi}$ , estos dos puntos ocupan las posiciones  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X})$  e  $\mathbf{y} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{Y})$ . Si llamamos  $d\mathbf{x}$  al vector  $d\mathbf{X}$  deformado que va de  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$  se tiene que, utilizando un desarrollo en serie

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \mathbf{y} - \mathbf{x} \\ &= \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{Y}) - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}) \\ &= \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}) - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}) \\ &= \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}) + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} + \mathcal{O}(\|d\mathbf{X}\|^2) - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}) \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} . \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

En algunas aplicaciones también se emplea el gradiente del desplazamiento  $\mathbf{u}$ . Este se define como

$$\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}) - \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) - \mathbf{1} . \quad (2.3.4)$$

**Ejemplo 3.1:** Considérese la deformación de un cuerpo sólido que ocupa, en su configuración de referencia, el cubo  $(0,1) \times (0,1) \times (0,1)$ . El cuerpo se encuentra deformado con una función de deformación:

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}) = (X_1 + \gamma X_2)\mathbf{e}_1 + X_2\mathbf{e}_2 + X_3\mathbf{e}_3 . \quad (2.3.5)$$

El campo de deformaciones asociado es  $\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \gamma X_2\mathbf{e}_1 + X_2\mathbf{e}_2 + X_3\mathbf{e}_3$ . La matriz asociada al gradiente de deformación es:

$$[\mathbf{F}(\mathbf{X})] = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3.6)$$

□

### 3.1. Descomposición polar del gradiente de deformaciones

Más tarde veremos que el gradiente de deformación siempre posee determinante positivo. Tomando por el momento este resultado como válido se sigue del teorema de la descomposición polar que el tensor  $\mathbf{F}$  siempre se puede descomponer como:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{R}(\mathbf{X})\mathbf{U}(\mathbf{X}) = \mathbf{V}(\mathbf{X})\mathbf{R}(\mathbf{X}), \quad (2.3.7)$$

siendo  $\mathbf{R}$  un tensor ortogonal propio y  $\mathbf{U}, \mathbf{V}$  dos tensores simétricos, definidos positivos. El tensor  $\mathbf{R}$  se denomina *tensor de rotación* y los tensores  $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ , los *tensores de alargamiento derecho e izquierdo*, respectivamente.

La acción del tensor  $\mathbf{R}$  sobre un vector diferencial consiste en rotarlo, sin modificar su magnitud. Por contra, tanto  $\mathbf{U}$  como  $\mathbf{V}$  actúan sobre vectores diferenciales deformándolos. De la expresión (2.3.7) se sigue que, en general, el gradiente de deformación  $\mathbf{F}$  consta de una deformación  $\mathbf{U}$  y una rotación posterior  $\mathbf{R}$ , o equivalentemente, de una rotación  $\mathbf{R}$  y una deformación posterior  $\mathbf{V}$ .

Como los tensores de alargamiento son simétricos tienen siempre tres autovalores reales que se denominan los *alargamientos principales* y los denotaremos  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Como además estos tensores son definidos positivos, los tres autovalores serán siempre positivos.

**Ejemplo 3.2:** Para hallar los alargamientos principales correspondientes a la deformación (2.3.5) se calculan los autovalores  $\lambda_i^2$  del tensor

$$[\mathbf{C}(\mathbf{X})] = [\mathbf{F}(\mathbf{X})]^T [\mathbf{F}(\mathbf{X})] = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 + \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3.8)$$

que son:

$$\lambda_1^2 = 1, \quad \lambda_2^2 = \frac{1}{2}(2 + \gamma^2 - \gamma\sqrt{4 + \gamma^2}), \quad \lambda_3^2 = \frac{1}{2}(2 + \gamma^2 + \gamma\sqrt{4 + \gamma^2}). \quad (2.3.9)$$

Los alargamientos principales son sencillamente las raíces cuadradas positivas de los autovalores (2.3.9).  $\square$

## 4. Medidas locales de deformación

Además del gradiente de deformación y de los tensores de alargamiento existen otras muchas medidas locales de deformación que se emplean en Mecánica de Medios Continuos. Aunque como ya se ha explicado el gradiente de deformación contiene toda la información sobre la deformación local de un cuerpo hay ocasiones en las que otras medidas proporcionan información específica más conveniente o necesaria. Ya hemos visto, por ejemplo, como los tensores de alargamiento sirven para identificar los alargamientos principales, que contienen información muy interesante, como ya se verá. Existen además tensores de deformación, como el tensor de Green-Lagrange, que se emplean comúnmente para la definición de modelos constitutivos como se explicará en el capítulo correspondiente.

El tensor *derecho de Cauchy-Green* es un tensor de segundo orden definido como

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{X})^T \mathbf{F}(\mathbf{X}) . \quad (2.4.1)$$

De su definición se sigue que es un tensor simétrico, definido positivo. Más aún, empleando la descomposición polar del gradiente de deformaciones es inmediato verificar que

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}) = \mathbf{U}(\mathbf{X})^2 . \quad (2.4.2)$$

La descomposición espectral del tensor (derecho) de Cauchy-Green se puede obtener inmediatamente a partir de la del tensor (derecho) de alargamiento  $\mathbf{U}$ . Si los alargamientos principales se denotan como  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  y las direcciones principales de  $\mathbf{U}$  como  $\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2, \boldsymbol{\nu}_3$  entonces

$$\mathbf{C} = \sum_{a=1}^3 \lambda_a^2 \boldsymbol{\nu}_a \otimes \boldsymbol{\nu}_a . \quad (2.4.3)$$

El tensor *izquierdo de Cauchy-Green* está definido como

$$\mathbf{b}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \mathbf{F}(\mathbf{x})^T . \quad (2.4.4)$$

El tensor derecho de Cauchy-Green se emplean con mucha frecuencia para estudiar aspectos locales de la deformación, como se verá en la ‘*sec-trans*’. Un tensor de deformación que se emplea a menudo para la construcción de modelos constitutivos es el *tensor de Green-Lagrange*:

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C}(\mathbf{X}) - \mathbf{1}) , \quad (2.4.5)$$

cuya descomposición espectral se puede encontrar fácilmente:

$$\mathbf{E} = \sum_{a=1}^3 \frac{1}{2}(\lambda_a^2 - 1) \boldsymbol{\nu}_a \otimes \boldsymbol{\nu}_a . \quad (2.4.6)$$

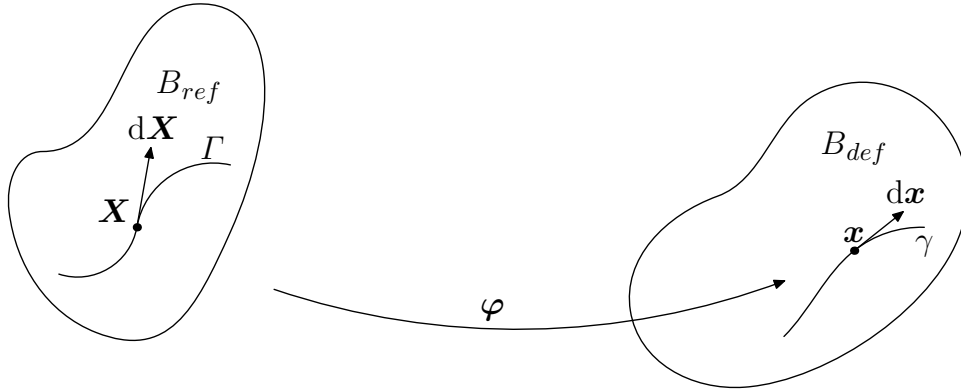
En general, empleando el concepto de descomposición espectral de un tensor se pueden definir infinitas medidas de deformación. Para ello basta con definir funciones escalares  $f(\lambda)$  y construir el tensor de deformación correspondiente de la siguiente manera:

$$\mathbf{E} = \sum_{a=1}^3 f(\lambda_a) \boldsymbol{\nu}_a \otimes \boldsymbol{\nu}_a . \quad (2.4.7)$$

Evidentemente, existen algunas restricciones para las funciones  $f(\lambda)$  que son:

- i) Han de estar definidas para  $\lambda \in (0, \infty)$ ,
- ii) han de ser monotónicamente crecientes ( $f'(\lambda) > 0$ ),
- iii) han de anularse cuando el cuerpo no está deformado, es decir,  $f(1) = 0$ , y
- iv) deben de cumplir que  $f'(1) = 1$ .

La justificación de la última condición se entiende en el contexto de las deformaciones infinitesimales, explicadas más adelante en este capítulo. El tensor de Green-Lagrange es de



**Figura 2.5.1:** Transformación de una curva material  $\Gamma$ .

la forma (2.4.7), siendo  $f(\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1)$ . Resulta útil generalizar este tipo de medidas de deformación de la siguiente manera:

$$\mathbf{E}^{(m)} = \sum_{a=1}^3 f^{(m)}(\lambda_a) \boldsymbol{\nu}_a \otimes \boldsymbol{\nu}_a, \quad \text{con} \quad f^{(m)}(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{m}(\lambda^m - 1) & \text{si } \lambda \neq 0 \\ \log \lambda & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}. \quad (2.4.8)$$

Se puede verificar de forma inmediata que las funciones  $f^{(m)}$  cumplen las cuatro condiciones identificadas anteriormente.

**Ejemplo 4.1:** Considérese la estiramiento uniforme de una barra recta empotrada en un extremo y de longitud  $L$  en su configuración de referencia. La barra se estira debido a la aplicación de una fuerza en su extremo libre de forma que su longitud deformada sea  $\ell$  con lo que el campo de deformación para este problema unidimensional es  $\varphi(\mathbf{X}) = \ell/L\mathbf{X}$ .

- i) El gradiente de deformación es  $\mathbf{F} = \frac{\partial \varphi(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \ell/L$ .
- ii) El tensor de Cauchy-Green es simplemente  $\mathbf{C} = \ell^2/L^2$ .
- iii) El tensor de Green-Lagrange toma el valor  $\mathbf{E} = \frac{\ell^2 - L^2}{2L^2}$ .
- iv) El tensor de deformación  $\mathbf{E}^{(o)}$  se simplifica a  $\mathbf{E}^{(o)} = \log \frac{\ell}{L}$ . □

## 5. Transformación de longitud, superficie y volumen

La cinemática de medios continuos intenta describir la deformación global y local de los cuerpos. En particular, resulta muy interesante poder calcular, a partir del campo de deformaciones, cómo se transforman los arcos, las superficies y los volúmenes. La forma de abordar esta cuestión es estudiando estas transformaciones a nivel diferencial e integrando los resultados así obtenidos. Como veremos en esta sección toda esta información se puede obtener a partir del gradiente de deformación.

## 5.1. Transformación de longitud y ángulo

Ya se explicó en la ‘sec-deformación’ que el gradiente de deformación  $\mathbf{F}$  transforma los vectores diferenciales desde la configuración de referencia a la deformada. Suponemos ahora que un vector diferencial  $d\mathbf{X}$  en la configuración de referencia tiene dirección  $\boldsymbol{\eta}_o$  y longitud  $dS$ , es decir,  $d\mathbf{X} = \boldsymbol{\eta}_o dS$ . Una vez transformado debido a la deformación del medio continuo, este vector se transforma en  $d\mathbf{x}$  que tiene dirección  $\boldsymbol{\eta}$  y longitud  $ds$ . La definición matemática de estas dos longitudes (que son magnitudes escalares) es:

$$dS^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} , \quad ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} . \quad (2.5.1)$$

A partir de la expresión (2.3.2) que relaciona los vectores diferenciales sin deformar y deformado obtenemos:

$$ds^2 = (\mathbf{F} d\mathbf{X}) \cdot (\mathbf{F} d\mathbf{X}) = (\boldsymbol{\eta}_o dS) \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} (\boldsymbol{\eta}_o dS) = dS^2 \boldsymbol{\eta}_o \cdot \mathbf{C} \boldsymbol{\eta}_o . \quad (2.5.2)$$

Concluimos pues, que dado un vector diferencial  $d\mathbf{X} = \boldsymbol{\eta}_o dS$ , con  $\|\boldsymbol{\eta}_o\| = 1$  y origen en el punto  $\mathbf{X}$  de la configuración de referencia, éste se transforma en otro vector diferencial  $d\mathbf{x}$ , con origen en  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X})$  y de longitud  $ds$ , dada por la expresión (2.5.2). El alargamiento por unidad de longitud de la curva  $\Gamma$  en el punto  $\mathbf{X}$  verifica pues:

$$\lambda = \sqrt{\boldsymbol{\eta}_o \cdot \mathbf{C}(\mathbf{X}) \boldsymbol{\eta}_o} . \quad (2.5.3)$$

Consideremos ahora el caso más complejo de una curva material  $\Gamma$  definida en la configuración de referencia. Esta curva está “pegada” a las partículas materiales que se encuentran “bajo” ella. Cuando estas partículas se deforman debido a la deformación  $\boldsymbol{\varphi}$ , la curva también se deforma y ocupa una posición  $\gamma = \boldsymbol{\varphi}(\Gamma)$  de la configuración deformada. La longitud de las dos curvas se puede calcular como

$$\begin{aligned} L &= \int_{\Gamma} dS , \\ \ell &= \int_{\gamma} ds = \int_{\Gamma} \sqrt{\boldsymbol{\eta}_o(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{C}(\mathbf{X}) \boldsymbol{\eta}_o(\mathbf{X})} dS , \quad \boldsymbol{\eta}_o(\mathbf{X}) = \frac{\Gamma'(\mathbf{X})}{\|\Gamma'(\mathbf{X})\|} . \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Se puede considerar ahora el cambio del ángulo que forman entre sí dos vectores diferenciales  $d\mathbf{X}_1 = \boldsymbol{\eta}_1 dS_1$  y  $d\mathbf{X}_2 = \boldsymbol{\eta}_2 dS_2$  con origen en el punto  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_o$  al deformarse el cuerpo. El ángulo  $\theta_o$  que estos dos vectores forman en la configuración de referencia se puede calcular empleando las propiedades del producto escalar:

$$\cos \Theta = \frac{d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2}{\|d\mathbf{X}_1\| \|d\mathbf{X}_2\|} = \boldsymbol{\eta}_1 \cdot \boldsymbol{\eta}_2 . \quad (2.5.5)$$

De la misma manera, después de deformarse, los correspondientes vectores diferenciales forman un ángulo  $\theta$  en la configuración deformada cuya magnitud viene dada por

$$\cos \theta = \frac{d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2}{\|d\mathbf{x}_1\| \|d\mathbf{x}_2\|} , \quad (2.5.6)$$



que se puede expresar como:

$$\cos \theta = \frac{\boldsymbol{\eta}_1 \cdot \mathbf{C}(\mathbf{X})\boldsymbol{\eta}_2}{\sqrt{\boldsymbol{\eta}_1 \cdot \mathbf{C}(\mathbf{X})\boldsymbol{\eta}_1} \sqrt{\boldsymbol{\eta}_2 \cdot \mathbf{C}(\mathbf{X})\boldsymbol{\eta}_2}} \quad (2.5.7)$$

## 5.2. Transformación de área

De la misma manera que las curvas materiales se deforman cuando el medio sobre el que están definidas se deforma, las superficies también. Para evaluar cuantitativamente el efecto de esta deformación se considera un diferencial de superficie sobre la configuración de referencia. Este diferencial es una cantidad vectorial cuya magnitud  $dA$  es el área de un paralelogramo de lados  $d\mathbf{X}_1$  y  $d\mathbf{X}_2$  y cuya dirección  $\mathbf{N}$  viene dada por  $d\mathbf{X}_1 \wedge d\mathbf{X}_2$ . Es decir,

$$d\mathbf{A} = \mathbf{N} dA = d\mathbf{X}_1 \wedge d\mathbf{X}_2 . \quad (2.5.8)$$

Para calcular la superficie y dirección del elemento de área deformado basta con emplear las definiciones  $d\mathbf{x}_1 = \mathbf{F} d\mathbf{X}_1$ ,  $d\mathbf{x}_2 = \mathbf{F} d\mathbf{X}_2$  así como la propiedad elemental  $(\mathbf{T}\mathbf{a}) \wedge (\mathbf{T}\mathbf{b}) = \det(\mathbf{T})\mathbf{T}^{-T}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$ . De estas expresiones se obtiene que el diferencial de superficie deformada  $d\mathbf{a}$  se puede calcular como

$$d\mathbf{a} = d\mathbf{x}_1 \wedge d\mathbf{x}_2 = (\mathbf{F} d\mathbf{X}_1) \wedge (\mathbf{F} d\mathbf{X}_2) = \det(\mathbf{F})\mathbf{F}^{-T}(d\mathbf{X}_1 \wedge d\mathbf{X}_2) = \det(\mathbf{F})\mathbf{F}^{-T} d\mathbf{A} . \quad (2.5.9)$$

## 5.3. Transformación de volumen

Finalmente, y siguiendo el mismo proceso que en los dos casos anteriores, también podemos calcular el efecto de la deformación sobre el volumen de un cuerpo continuo. Sea un diferencial de volumen material  $dV$  en la configuración de referencia. Este volumen se puede considerar como el que contiene un paralelepípedo diferencial cuyos lados son los vectores diferenciales  $d\mathbf{X}_1$ ,  $d\mathbf{X}_2$  y  $d\mathbf{X}_3$  situados sobre el punto  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_o$ . A partir de las propiedades del producto mixto el volumen diferencial se puede calcular como

$$dV = [d\mathbf{X}_1, d\mathbf{X}_2, d\mathbf{X}_3] . \quad (2.5.10)$$

Empleando la propiedad del producto mixto  $[\mathbf{T}\mathbf{a}, \mathbf{T}\mathbf{b}, \mathbf{T}\mathbf{c}] = \det(\mathbf{T})[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$  resulta de (2.5.10) que el diferencial de volumen deformado  $dv$  tiene valor

$$dv = [d\mathbf{x}_1, d\mathbf{x}_2, d\mathbf{x}_3] = [\mathbf{F} d\mathbf{X}_1, \mathbf{F} d\mathbf{X}_2, \mathbf{F} d\mathbf{X}_3] = \det(\mathbf{F})[d\mathbf{X}_1, d\mathbf{X}_2, d\mathbf{X}_3] = \det(\mathbf{F}) dV . \quad (2.5.11)$$

El determinante del gradiente de deformaciones se suele indicar con la letra  $J$ , así pues

$$J = \det(\mathbf{F}) = \sqrt{\det(\mathbf{F})} = I_3(\mathbf{F}) . \quad (2.5.12)$$

El jacobiano  $J$  proporciona, como se ha visto, el cociente entre el volumen deformado y el volumen sin deformar de un paralelepípedo elemental. Como la materia no puede desaparecer, este cociente podrá ser mayor o menor que uno, pero siempre habrá de ser positivo.

Sea  $\Omega_o$  una región material del cuerpo. Si su volumen es  $V = \int_{\Omega_o} dV$  se obtiene fácilmente que el volumen de esta región una vez deformada es

$$v = \text{volumen}(\varphi(\Omega_o)) = \int_{\varphi(\Omega_o)} dv = \int_{\Omega_o} J(\mathbf{X}) dV \quad (2.5.13)$$

## 6. Deformaciones de sólido rígido

En las próximas tres secciones se van a estudiar algunos tipos de deformaciones que merecen especial atención. El primer tipo lo constituyen las deformaciones de sólido rígido. Estos tipos de movimientos son aquellos en los que el cuerpo se mueve sin que cambie la distancia relativa entre puntos del mismo. Es decir, para cualquier pareja de puntos  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  del cuerpo:

$$\|\mathbf{Y} - \mathbf{X}\| = \|\varphi(\mathbf{Y}) - \varphi(\mathbf{X})\| . \quad (2.6.1)$$

Las deformaciones de sólido rígido son siempre de la forma:

$$\varphi(\mathbf{X}) = \varphi(\mathbf{Y}) + \mathbf{Q}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) , \quad (2.6.2)$$

donde  $\mathbf{Y}$  es un punto cualquiera del cuerpo y  $\mathbf{Q}$  es un tensor ortogonal propio. Es sencillo comprobar que los movimiento de tipo (2.6.2) preservan las distancias relativas. La demostración de que éstas son las únicas deformaciones con esta propiedad es un poco más compleja: derivando (2.6.1) respecto a  $\mathbf{X}$  primero y respecto a  $\mathbf{Y}$  después se obtiene:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X})^T \mathbf{F}(\mathbf{Y}) = \mathbf{1} . \quad (2.6.3)$$

Elijiendo  $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$  en esta ecuación deducimos que el gradiente de deformación ha de ser ortogonal y puesto que  $\det(\mathbf{F}) > 0$ , además propio, es decir una rotación. Volviendo a la ecuación (2.6.3) se deduce que  $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{Y})$ , es decir que el campo de rotaciones es constante  $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{Q}$ . Una deformación con gradiente de deformación constante e igual a  $\mathbf{Q}$  ha de ser de la forma (2.6.2).

Las deformaciones de sólido rígido tienen gradiente de deformación  $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{Q}$  por lo que el tensor de Cauchy-Green es sencillamente

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}) = \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{1} . \quad (2.6.4)$$

Se deduce pues que, como era de esperar, una deformación de sólido rígida preserva las longitudes, áreas y volúmenes diferenciales. También se puede demostrar que una deformación con  $\mathbf{C}(\mathbf{X}) = \mathbf{1}$  ha de ser de la forma (2.6.2).

Dentro de las deformaciones de sólido rígido existen un tipo muy sencillo que son las translaciones rígidas. Estas son de la forma:

$$\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{a} + \mathbf{X} . \quad (2.6.5)$$

## 7. Deformaciones homogéneas

El segundo tipo de deformaciones que estudiamos son las llamadas *deformaciones homogéneas*, definidas como aquellas en las que el gradiente de deformación  $\mathbf{F}$  es constante para todas las partículas del cuerpo.

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{F} . \quad (2.7.1)$$

La forma más general de una deformación homogénea es pues

$$\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{a} + \mathbf{F}\mathbf{X} , \quad (2.7.2)$$

siendo  $\mathbf{a}$  un vector cualquiera.

Este tipo de deformación es sencillo pues todas las medidas de deformación (que siempre se derivan del gradiente de deformación) son iguales para todos los puntos del cuerpo. Esto además implica que las relaciones derivadas para la transformación de vectores infinitesimales, áreas y volúmenes son en este caso válidas para vectores, áreas y volúmenes de tamaño *finito*.

Un caso particular sencillo pero importante de deformación homogénea es el *alargamiento*. Se dice que una deformación es un *alargamiento* o *estiramiento* si es de la forma:

$$\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{Y} + \mathbf{U}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) , \quad (2.7.3)$$

siendo  $\mathbf{Y}$  un punto fijo y  $\mathbf{U}$  un tensor simétrico y definido positivo. Se puede comprobar inmediatamente que un alargamiento es una deformación homogénea con gradiente de deformación  $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{U}$ . Empleando el teorema de la descomposición polar al gradiente de deformación concluimos que ésta no incluye ninguna rotación. Nótese que una deformación de alargamiento puede “acortar” las dimensiones del cuerpo continuo.

El siguiente teorema caracteriza todas las deformaciones homogéneas como composición de otras más sencillas:

**Teorema 7.1:** *Toda deformación homogénea  $\varphi$  se puede escribir como la composición de una translación, una rotación pura y un alargamiento:*

$$\varphi(\mathbf{X}) = (\varphi_{tr} \circ \varphi_{rot} \circ \varphi_{est})(\mathbf{X}) . \quad (2.7.4)$$

DEMOSTRACIÓN: Para demostrar este teorema basta definir las tres deformaciones como:

$$\begin{aligned} \varphi_{tr} &= \varphi(\mathbf{Y}) + \mathbf{X} - \mathbf{Y} , \\ \varphi_{rot} &= \mathbf{Y} + \mathbf{R}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) , \\ \varphi_{est} &= \mathbf{Y} + \mathbf{U}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) . \end{aligned} \quad (2.7.5)$$

■

## 8. Deformaciones infinitesimales

Quizás las deformaciones “sencillas” más importantes que existen son las llamadas “deformaciones infinitesimales” y que estudiamos en esta sección. Este tipo de deformaciones son las que se estudiaban antes casi exclusivamente en asignaturas como “Elasticidad y Resistencia de Materiales”, pues permiten resolver un gran número de problemas prácticos y además son mucho más sencillas que las deformaciones generalizadas que se han presentado en este capítulo. Aunque nos ceñiremos en esta sección a su descripción cinemática, este tipo de deformaciones simplifica también, como veremos más adelante en el curso, las ecuaciones de equilibrio y los modelos constitutivos.

Para medir el tamaño de una deformación definimos el parámetro adimensional

$$h(\mathbf{X}) = \|\mathbf{H}(\mathbf{X})\| , \quad (2.8.1)$$

donde  $\mathbf{H} = \text{GRAD } \mathbf{u}$ . Este parámetro permite definir de manera rigurosa el concepto de deformación infinitesimal:

**Definición 8.1:** *Se dice que una deformación es infinitesimal si, para todo punto  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_{ref}$ , el parámetro  $h(\mathbf{X})$  es muy pequeño, es decir,*

$$h(\mathbf{X}) \ll 1 . \quad (2.8.2)$$

Las deformaciones infinitesimales son un subconjunto de las deformaciones posibles de un cuerpo. La propiedad (2.8.2) que las caracteriza tiene implicaciones de muy largo alcance, la mayoría de las cuales simplifica enormemente el tratamiento matemático de dichas deformaciones. La primera simplificación del cálculo tensorial es que no resulta necesario distinguir entre derivadas con respecto a coordenadas materiales y espaciales. Así por ejemplo

$$\text{grad } \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \text{GRAD } \mathbf{u} \mathbf{F}^{-1} = \text{GRAD } \mathbf{u} (\mathbf{1} + \mathbf{H})^{-1} = \text{GRAD } \mathbf{u} + \mathcal{O}(h) . \quad (2.8.3)$$

Por ello, cuando se estudien deformaciones infinitesimales, no se utilizará la notación GRAD o grad sino únicamente  $\nabla$ . De la misma manera, en vez de DIV o div emplearemos  $\nabla \cdot$ , y en vez de ROT y rot, simplemente  $\nabla \wedge$ .

Existen dos tensores de deformación que se emplean comúnmente en problemas de deformaciones infinitesimales:

**Definición 8.2:** *En una deformación infinitesimal con función de desplazamiento  $\mathbf{u}(\mathbf{X})$  se define el tensor de deformación infinitesimal  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X})$  como el tensor de segundo orden simétrico*

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}) + \nabla^T \mathbf{u}(\mathbf{X})) , \quad (2.8.4)$$

*o en componentes*

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = u_{(i,j)} . \quad (2.8.5)$$

*Además se define el tensor de rotación infinitesimal  $\mathbf{W}(\mathbf{X})$  como el tensor de segundo orden hemisimétrico*

$$\mathbf{W}(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}) - \nabla^T \mathbf{u}(\mathbf{X})) , \quad (2.8.6)$$

o en componentes

$$W_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) = u_{[i,j]} . \quad (2.8.7)$$

Existen varias maneras de motivar la definición del tensor de deformaciones infinitesimales. El siguiente teorema muestra que dicho tensor es una aproximación del tensor de deformación de Green-Lagrange. En realidad, dicha justificación se podría generalizar a cualquier medida de deformación del tipo (2.4.7).

**Teorema 8.3:** *El tensor de deformaciones infinitesimales  $\varepsilon$  es una aproximación de orden  $\mathcal{O}(h^2)$  del tensor de deformación de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$ .*

DEMOSTRACIÓN:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) \\ &= \frac{1}{2}((\mathbf{1} + \mathbf{H})^T (\mathbf{1} + \mathbf{H}) - \mathbf{1}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}) \\ &= \varepsilon + \frac{1}{2} \mathbf{H}^T \mathbf{H} \\ &= \varepsilon + \mathcal{O}(h^2) . \end{aligned} \quad (2.8.8)$$

■

En una deformación infinitesimal el tensor de deformación (de Green-Lagrange, por ejemplo) es igual, salvo un error de tamaño  $\mathcal{O}(h^2)$ , al tensor infinitesimal de deformación  $\varepsilon$ . Por ello, si se ignoran estos pequeños errores, el tensor  $\varepsilon$  es la medida de deformación que caracteriza este tipo de deformaciones.

La teoría de deformaciones infinitesimales, o pequeñas deformaciones, parte de la hipótesis de que dichos errores se pueden ignorar y por lo tanto  $\varepsilon$  es la única medida de deformación. Hay que resaltar que esto es una aproximación que sólo es buena cuando  $h(\mathbf{X})$  es muy pequeño, pues  $\varepsilon$  no es una verdadera medida de deformación para deformaciones grandes.

Una propiedad fundamental de las deformaciones infinitesimales es que la medida de deformación  $\varepsilon$  es una función *lineal*, al contrario que  $\mathbf{E}$  y otras medidas de deformación discutidas en la ‘*sec-trans*’. Esta es una característica que modifica de manera radical la forma de enfocar la teoría de medios deformables y eventualmente posibilitará que las ecuaciones del problema elástico con deformaciones infinitesimales definan un problema lineal. Esto a su vez posibilitará el principio de superposición que puede ser empleado para resolver problemas de forma sistemática y simplificada.

## 8.1. Deformaciones infinitesimales rígidas

El tensor de deformación infinitesimal mide el grado de deformación local en una deformación infinitesimal. Por ello se dice que una deformación es infinitesimalmente rígida si dicho tensor de deformación se anula, es decir

$$\varepsilon(\mathbf{X}) = 0, \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in \mathcal{B} \quad (2.8.9)$$

En las deformaciones infinitesimales rígidas el gradiente de desplazamiento  $\mathbf{H}$  ha de ser hemisimétrico y coincide con el tensor de rotación infinitesimal  $\mathbf{W}$ :

$$\mathbf{H} = \text{sim}(\mathbf{H}) + \text{hem}(\mathbf{H}) = \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{W} = \mathbf{W} . \quad (2.8.10)$$

Este tipo de deformaciones ha de tener una función de desplazamiento que sólo puede ser de la siguiente forma:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{u}(\mathbf{Y}) + \mathbf{W}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) , \quad (2.8.11)$$

donde  $\mathbf{Y}$  es cualquier punto del cuerpo. Recalcamos que una deformación infinitesimalmente rígida no es una deformación rígida, tal y como éstas se definieron en la ‘sec-rigido’.

## 8.2. Cambio de volumen

En la ‘subs-volumen’ estudiamos cómo se puede calcular el cambio de volumen en una deformación cualquiera. En el caso de una deformación infinitesimal dicho cálculo se simplifica, si estamos dispuestos a despreciar los terminos de orden  $\mathcal{O}(h^2)$  o más pequeños.

**Definición 8.4:** *La deformación volumétrica infinitesimal  $\theta(\mathbf{X})$  es la función escalar*

$$\theta(\mathbf{X}) = \text{traza}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X})) = \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{X}) . \quad (2.8.12)$$

Como en el caso de las medidas de deformación infinitesimal introducidas anteriormente, la función escalar  $\theta$  es una aproximación al verdadero cambio de volumen que ocurre en una deformación cualquiera. La precisión de dicha aproximación depende, como siempre, del tamaño de  $h$ .

**Teorema 8.5:** *La deformación volumétrica  $\theta$  es una aproximación de orden  $h^2$  al cambio de volumen  $J - 1$ , donde  $J = \det(\mathbf{F})$ .*

DEMOSTRACIÓN: Para demostrar este teorema basta con calcular el valor del jacobiano  $J$ . Si  $\|\mathbf{H}\| = h$ , entonces

$$\mathbf{J} = \det(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{1} + \mathbf{H}) = 1 + H_{11} + H_{22} + H_{33} + \mathcal{O}(h^2) . \quad (2.8.13)$$

Con lo que

$$\theta = H_{11} + H_{22} + H_{33} , \quad (2.8.14)$$

es una aproximación de orden  $\mathcal{O}(h^2)$  al verdadero cambio de volumen. ■

## 8.3. Deformación desviadora y volumétrica

En numerosas circunstancias será necesario descomponer una medida de deformación cualquiera en dos partes independientes: una parte informa sobre el cambio de volumen que el cuerpo experimenta localmente y otra sobre el cambio de forma, también local. La primera parte se llama la deformación volumétrica y la segunda, la desviadora. A partir de

los argumentos de la 2.8.12 se deduce que la parte volumétrica del tensor de deformación infinitesimal es:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_v(\mathbf{X}) = \frac{\theta(\mathbf{X})}{3} \mathbf{1} , \quad (2.8.15)$$

y la parte desviadora es:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_d(\mathbf{X}) = \mathbf{e}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\varepsilon}_v(\mathbf{X}) . \quad (2.8.16)$$

El tensor  $\boldsymbol{\varepsilon}_v$  es un tensor de deformación cuya traza es la misma que la traza de  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , es decir, que representa la misma deformación volumétrica. El tensor  $\mathbf{e}$  sin embargo tiene traza nula, es decir, que no contiene nada de deformación volumétrica.

## 8.4. Transformación de longitud y ángulo en una deformación infinitesimal

En la ‘subs-longitud’ se estudió cómo el tensor (derecho) de Cauchy-Green incluye la información necesaria para obtener el cambio de longitud de vectores diferenciales debido a la deformación y el cambio en el ángulo que forman dos de ellos. En esta sección se estudia los mismos efectos pero en deformaciones infinitesimales y deduciremos que el tensor de deformación infinitesimal  $\boldsymbol{\varepsilon}$  también se puede emplear para obtener esta misma información local.

De la misma manera que en la ‘sec-trans’ consideramos un vector  $d\mathbf{X}$  en la configuración de referencia, de tamaño  $dS = \|d\mathbf{X}\|$  y dirección  $\boldsymbol{\eta}$ . Si se define  $\delta = \lambda - 1$  y se usan las ecuaciones (2.8.8) y (2.5.3) obtenemos:

$$\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X})\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{X})\boldsymbol{\eta} + \mathcal{O}(h^2) = \frac{1}{2}\lambda^2 - 1 + \mathcal{O}(h^2) = \delta \mathcal{O}(h^2) . \quad (2.8.17)$$

Este resultado establece que el producto  $\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\eta}$  sirve para calcular el *incremento de longitud unitario* en la dirección  $\boldsymbol{\eta}$ , en el punto  $\mathbf{X}$ . En particular si escogemos  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{e}_i$ , un vector de la base coordenada, obtenemos que  $\varepsilon_{ii}$  (no hay sumatorio) es el incremento de longitud unitario en la dirección coordinada  $X_i$ .

De la misma manera, si ahora consideramos dos vectores diferenciales  $d\mathbf{X}_1, d\mathbf{X}_2$  de tamaños  $dS_1, dS_2$ , direcciones  $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$ , situados en el punto  $\mathbf{X}$  de la configuración de referencia, se tiene que usando la misma notación que en la ‘subs-longitud’,

$$\boldsymbol{\eta}_1 \cdot \mathbf{E}\boldsymbol{\eta}_2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\eta}_1 \cdot \mathbf{C}\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1 \cdot \boldsymbol{\eta}_2) = \frac{1}{2}(\lambda_1\lambda_2 \cos \theta - \cos \Theta) . \quad (2.8.18)$$

Supongamos ahora que elegimos los dos vectores diferenciales de forma que formen inicialmente un ángulo  $\Theta = \pi/2$ , y definamos  $\delta_1 = \lambda_1 - 1, \delta_2 = \lambda_2 - 1, \gamma = \pi/2 - \theta$ . Entonces,

$$\boldsymbol{\eta}_1 \cdot \mathbf{E}\boldsymbol{\eta}_2 = \frac{1}{2}((1 + \delta_1)(1 + \delta_2) \cos(\pi/2 - \gamma) - 0) = \frac{1}{2}(1 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_1\delta_2) \sin \gamma . \quad (2.8.19)$$

Si en lugar de emplear el tensor de Green-Lagrange empleamos el tensor de deformaciones infinitesimales se sigue que:

$$\boldsymbol{\eta}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\eta}_2 = \boldsymbol{\eta}_1 \cdot \mathbf{E}\boldsymbol{\eta}_2 + \mathcal{O}(h^2) = \frac{1}{2}(1 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_1\delta_2) \sin \gamma + \mathcal{O}(h^2) . \quad (2.8.20)$$

Antes de deformarse

Después de deformarse

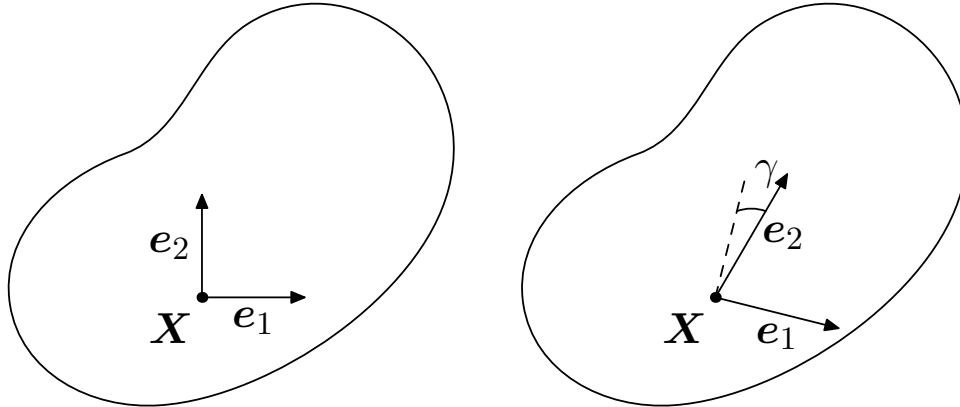


Figura 2.8.1: Ángulo  $\gamma$  que determina la deformación por cortante.

En una deformación infinitesimal tanto las cantidades  $\delta$  como el ángulo  $\gamma$  han de ser de orden  $\mathcal{O}(h)$  y la expresión anterior se puede simplificar a:

$$\boldsymbol{\eta}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\eta}_2 = \frac{\gamma}{2} + \mathcal{O}(h^2). \quad (2.8.21)$$

Este resultado establece que el producto  $\boldsymbol{\eta}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\eta}_2$  sirve para calcular el *cambio del ángulo*, debido a la deformación, que forman dos vectores infinitesimales que inicialmente formaban un ángulo recto. En particular si escogemos  $\boldsymbol{\eta}_i = \mathbf{e}_i$ , un vector de la base coordenada, obtenemos que  $\varepsilon_{ij}$  es la mitad del ángulo que se ha cerrado o abierto entre dos vectores paralelos a  $\mathbf{e}_i$  y  $\mathbf{e}_j$  y situados en el punto  $\mathbf{X}$ . La cantidad  $\gamma$  se llama de deformación por cortante (ingenieril).

## 9. Ecuaciones de compatibilidad

Dada una función de deformación  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X})$  se pueden hallar las medidas locales de deformación  $\mathbf{C}(\mathbf{X})$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{X})$ , etc. Sin embargo, dado un campo de deformación  $\mathbf{C}(\mathbf{X})$ , ¿existe alguna deformación  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X})$  tal que dicho tensor de Cauchy-Green provenga de ella? La respuesta a esta pregunta no es inmediata y desde luego no siempre es afirmativa (véase Marsden:elas:83, PG. 81].

De la misma manera, en una deformación infinitesimal, dado el campo de desplazamientos  $\mathbf{u}(\mathbf{X})$  se puede calcular el tensor de deformación infinitesimal  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X})$ . Ahora bien, la pregunta inversa, al igual que en el caso de deformaciones finitas, no es trivial. Para el problema de deformaciones infinitesimales presentamos en forma de un teorema, que no demostramos, las condiciones necesarias y suficientes para que un campo de deformaciones infinitesimales  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X})$  provenga de un campo de desplazamientos.



**Teorema 9.1:** *Un campo de deformaciones infinitesimales  $\varepsilon(\mathbf{X})$  proviene de un campo de desplazamientos  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  si y sólo si se cumplen las (seis) condiciones:*

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jk,il} \quad (2.9.1)$$

En el caso de deformación plana ( $u_1 = u_1(X_1, X_2), u_2 = u_2(X_1, X_2), u_3 = 0$ ) las condiciones (2.9.1) se simplifican y sólo una de ellas es independiente

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\varepsilon_{12,12} . \quad (2.9.2)$$

## 10. Movimientos en tiempo. Trayectoria

Hasta ahora nos hemos centrado en el estudio de la cinemática de cuerpos deformables centrándonos en las deformaciones que ocurren entre una configuración de referencia y una configuración deformada. En ésta y las próximas secciones se estudian familias de configuraciones deformadas y los objetos cinemáticos que se pueden definir para su estudio.

En primer lugar se define un movimiento como una familia de configuraciones  $\varphi_t$  que depende de un parámetro  $t$  (el tiempo) de forma diferenciable. Es decir, si  $\mathcal{K}(\mathcal{B})$  es el espacio de configuraciones posibles de un cuerpo continuo  $\mathcal{B}$ , entonces  $\varphi_t$  es una curva en  $\mathcal{K}(\mathcal{B})$ . La notación que se emplea para cada una de estas configuraciones es  $\varphi_t(\mathbf{X})$  o  $\varphi(\mathbf{X}, t)$ .

Se define la configuración inicial como aquella que tiene lugar en el instante  $t = 0$ , es decir,  $\chi_o$ . Es muy corriente que cuando se estudia el movimiento de un cuerpo éste se encuentre sin deformar en el instante inicial, es decir  $\chi_o \equiv \chi_{ref}$ . Aunque los conceptos de configuración inicial, de referencia y sin deformar son distintos en la práctica coinciden prácticamente siempre y los emplearemos indistintamente.

Cuando un cuerpo realiza un movimiento como se ha descrito anteriormente, cada partícula material  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_{ref}$  recorre una curva en el espacio  $\mathbf{c}(t)$  que se puede expresar en función del campo de configuraciones como:

$$\mathbf{c}(t) = \varphi(\mathbf{X}, t) . \quad (2.10.1)$$

Esta curva se denomina *trayectoria* y determina de forma inequívoca la posición de la partícula  $\mathbf{X}$  en cada instante de tiempo. Nótese que en el instante  $t = 0$ ,  $\mathbf{c}(0) = \varphi(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{X}$ .

## 11. Descripción material y espacial

El movimiento de un cuerpo continuo se define completamente mediante la familia de configuraciones  $\varphi_t$ . En un instante de tiempo genérico  $t$  además estas configuraciones definen una aplicación biyectiva entre  $\mathcal{B}_o$  y  $\mathcal{B}_t$ . Esto significa que cada partícula material  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_o$  ocupa, en dicho instante, un punto del espacio  $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t$  y que además cada punto de la región  $\mathcal{B}_t \in \mathbb{R}^3$  es la imagen de una y solamente una partícula material del cuerpo. Dado una posición  $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t$  podemos encontrar cuál es la partícula que ocupa ese lugar en el instante  $t$  mediante la función inversa y obtenemos  $\mathbf{X} = \varphi_t^{-1}(\mathbf{x})$ .

Considérese ahora un campo escalar, vectorial o tensorial  $\mathbf{Y}$  que está definida en todo instante sobre las partículas materiales de la configuración de referencia. La expresión completa de esta función, incluyendo sus argumentos, es  $\mathbf{Y}(\mathbf{X}, t)$  y devuelve, para cada instante de tiempo  $t$  el valor del campo  $\mathbf{Y}$  que corresponde a la partícula  $\mathbf{X}$ . Se dice que  $\mathbf{Y}$  es un campo *material*.

Empleando la relación biyectiva que la deformación establece podemos expresar el campo  $\mathbf{Y}$  en función de la posición  $\mathbf{x}$  en lugar de la partícula  $\mathbf{X}$ . Para ello sustituimos  $\mathbf{X}$  por  $\varphi_t^{-1}(\mathbf{x}, t)$  y definimos

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}, t) := \mathbf{Y}(\varphi_t^{-1}(\mathbf{x}, t), t) . \quad (2.11.1)$$

El campo  $\mathbf{y} = \mathbf{Y} \circ \varphi_t^{-1}$  depende de la posición y del tiempo y se denomina *espacial*. Los dos campos  $\mathbf{Y}$  y  $\mathbf{y}$  dan el mismo resultado si se evalúan en el mismo instante de tiempo y si  $\mathbf{x} = \varphi_t(\mathbf{X})$ . Además, conocido uno de ellos y la función  $\varphi_t$  se puede calcular el otro.

En Mecánica de Medios Continuos se usan campos materiales y espaciales, según la conveniencia de cada situación. En la mayoría de las situaciones se emplean letras mayúsculas para indicar los campos materiales y letras minúsculas para los espaciales. Como en el ejemplo anterior, la versión material y espacial de un mismo campo se indican con la misma letra pero en mayúscula y minúscula, respectivamente.

## 12. Velocidad y aceleración

Las definiciones de velocidad y de aceleración en Mecánica de Medios Continuos coinciden con las definiciones clásicas estudiadas en Mecánica Clásica. Sin embargo merecen un estudio cuidadoso para diferenciar las distintas formas de calcularlas.

Como en la ‘*sec-tiempo*’ se considera la trayectoria  $\mathbf{c}(t) = \varphi(\mathbf{X}, t)$  de una partícula material  $\mathbf{X}$  y se definen su velocidad y aceleración como la primera y segunda derivadas temporales de esta función. Más explícitamente:

**Definición 12.1:** *Dado un movimiento  $\varphi_t$  de un cuerpo continuo, se definen la velocidad material  $\mathbf{V}$  y la aceleración material  $\mathbf{A}$  de un partícula  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_o$  como:*

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \dot{\varphi}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} , \quad \mathbf{A}(\mathbf{X}, t) = \ddot{\varphi}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} . \quad (2.12.1)$$

Por su definición resulta obvio que se trata de dos campos vectoriales materiales. Físicamente representan la velocidad y aceleración, en el sentido clásico, de la partícula que ocupa la posición  $\mathbf{X}$  en el instante  $t = 0$ . Para muchas aplicaciones resulta útil definir la versión espacial de estos dos campos y se emplean las siguientes definiciones

**Definición 12.2:** *Dado un movimiento  $\varphi_t$  de un cuerpo continuo y la velocidad y aceleración materiales  $\mathbf{V}, \mathbf{A}$  se definen la velocidad espacial  $\mathbf{v}$  y la aceleración espacial  $\mathbf{a}$  como*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}(\varphi_t^{-1}(\mathbf{x}, t), t) , \quad \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\varphi_t^{-1}(\mathbf{x}, t), t) . \quad (2.12.2)$$

Como indican sus definiciones, se trata de dos campos espaciales. Físicamente, representan la velocidad y la aceleración, en sentido clásico, de la partícula que en el instante de tiempo  $t$  ocupa la posición  $\mathbf{x}$ .

Es importante notar que ni la velocidad espacial ni la aceleración espacial *son la derivada temporal de ninguna función*. Para hacer más patente esta distinción se define el siguiente concepto;

**Definición 12.3:** Sea  $\mathbf{Y}$  un campo escalar, vectorial o tensorial material. Se define la derivada temporal material como la derivada parcial de dicho campo con respecto al tiempo y se denota

$$\dot{\mathbf{Y}} = \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} . \quad (2.12.3)$$

La derivada temporal material de  $\mathbf{y}$ , un campo escalar, vectorial o tensorial espacial, se define de igual manera, es decir, como la derivada parcial con respecto al tiempo estando  $\mathbf{X}$  fija. Para distinguirla de la derivada parcial con respecto al tiempo usual, la derivada temporal material de dicho campo se escribe  $\frac{D\mathbf{y}}{Dt}$  y se calcula como

$$\frac{D\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{y}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t), t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \text{grad } \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) . \quad (2.12.4)$$

Con la notación introducida podemos resalta que la aceleración espacial  $\mathbf{a} \neq \dot{\mathbf{v}}$  sino que se puede calcular como

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\text{grad } \mathbf{v}) \mathbf{v} . \quad (2.12.5)$$

## 13. Ejercicios propuestos

**2.1** En un cierto instante, la deformación de un medio continuo viene definida por:

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}) = (X_1 - AX_3)\mathbf{e}_1 + (X_2 - AX_3)\mathbf{e}_2 + (-AX_1 + AX_2 + X_3)\mathbf{e}_3 .$$

Se pide:

- 1) Obtener el tensor gradiente de deformación  $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ , y justificar que se trata de una deformación homogénea.
- 2) Calcular el vector deformado de  $\mathbf{e}_1$ .
- 3) Hallar el tensor derecho de Cauchy-Green por la derecha  $\mathbf{C}(\mathbf{X})$ .
- 4) Calcular los alargamientos de los vectores  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  y  $\mathbf{e}_3$ .
- 5) Obtener el tensor material de deformación o tensor de Green-Lagrange  $\mathbf{E}(\mathbf{X})$ .
- 6) Determinar el tensor gradiente (material) de desplazamientos  $\mathbf{H}(\mathbf{X})$ .

**2.2** Un medio continuo experimenta una deformación definida por la función

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}) = (X_1^2 + X_2)\mathbf{e}_1 + \text{sen } X_2 \mathbf{e}_2 + X_3 \mathbf{e}_3 .$$

Se pide:

- 1) Calcula la expresión del gradiente de deformación  $\mathbf{F}(\mathbf{X})$  y del tensor de Cauchy-Green  $\mathbf{C}(\mathbf{X})$ .
- 2) Calcula los alargamientos principales en el punto  $\mathbf{Z} = (1, 0, 3)$ , así como las direcciones principales.
- 3) Un vector diferencial  $d\mathbf{X}$  tiene su origen en  $\mathbf{Z}$  y dirección  $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ . ¿Cuál es su alargamiento por unidad de longitud al deformarse?
- 4) De todos los vectores diferenciales con origen en el punto  $\mathbf{Z}$ , ¿Cuál de ellos experimenta un mayor alargamiento unitario? ¿Cuánto vale dicho alargamiento?
- 5) ¿Cuál es el incremento de volumen que sufre al deformarse un paralelepípedo infinitesimal situado en el punto  $\mathbf{Z}$ ?

**2.3** Una barra deformable, recta y de sección uniforme se encuentra sujeta en un extremo. Para estudiar la deformación de la barra se supone que el extremo fijo coincide con el origen de un sistema de coordenadas cartesianas y que la barra se encuentra situada en la dirección del eje de coordenadas definido por el primer vector de la base coordenada,  $\mathbf{e}_1$ . La longitud de la barra en el instante inicial se supone conocida y de valor  $L_o$ . Al aplicar una fuerza en la dirección de  $\mathbf{e}_1$  sobre el extremo libre de la barra ésta se deforma, permaneciendo sobre el eje coordenado, y su longitud en un instante cualquiera  $t > 0$  se denomina  $L_t$ . Si denominamos  $X \in [0, L_o]$  a los partículas de la barra en la configuración de referencia, la deformación se puede escribir como:

$$x = \varphi(X, t) = X \cdot (1 + ct),$$

siendo  $c$  una constante. De esta manera, la longitud  $L_t$  de la barra en el instante  $t$  se puede hallar como  $\varphi(L_o, t) = L_o(1 + ct)$ , puesto que coincide con la posición de la partícula  $X = L_o$  en el instante  $t$ . Para  $c = 1$ , se pide:

- 1) Calcular el gradiente de deformaciones  $\mathbf{F}$  expresado como una función del tiempo y también expresado como una función de la longitud actual  $L_t$  (y otras cantidades conocidas).
- 2) Razonar si la deformación de la barra es homogénea.
- 3) Calcular el tensor de Cauchy-Green  $\mathbf{C}$ , igual que antes expresado como una función del tiempo y también expresado como una función de la longitud actual  $L_t$ .
- 4) Calcular el tensor de Green-Lagrange, también expresado como una función del tiempo y como una función de la longitud actual  $L_t$ .
- 5) Dibujar un gráfico de  $F_{11}$ ,  $C_{11}$ , y  $E_{11}$  en función de  $L_t/L_o$ .

**2.4** Se considera ahora una deformación infinitesimal de un cuerpo con función de desplazamiento:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = (4X_1 - X_2 + 3X_3)\mathbf{e}_1 + (X_1 + 7X_2)\mathbf{e}_2 + (-3X_1 + 4X_2 + 4X_3)\mathbf{e}_3 .$$

Se pide:

- 1) El tensor de deformación infinitesimal  $\boldsymbol{\varepsilon}$  y el tensor de rotación infinitesimal  $\mathbf{W}$ .
- 2) La deformación volumétrica  $\theta$  y el tensor de deformación desviador.

3) Las deformaciones principales.

**2.5** Dado el gradiente de deformación de un estado homogéneo,

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

se pide:

- 1) Calcular el tensor derecho de Cauchy-Green por la derecha y el tensor material de deformación o tensor de Green.
- 2) Calcular el vector transformado de  $\mathbf{e}_1$ , determinando ángulo girado y su alargamiento.
- 3) Calcular el ángulo formado por los vectores transformados de  $\mathbf{e}_1$  y  $\mathbf{e}_2$ .
- 4) Calcular el volumen formado por los vectores deformados de  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  y  $\mathbf{e}_3$ .

**2.6** Considerar un cuerpo de dos dimensiones sometido a una deformación cuyo valor en coordenadas cartesianas es:

$$\{\varphi(X_1, X_2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \log(1 + X_1 t) \\ (X_2)^2 t \end{array} \right\}.$$

Para esta deformación,

- 1) Calcular el gradiente de deformación  $\mathbf{F}$ . Explicar si la deformación es homogénea.
- 2) Calcular  $\mathbf{C}$ , el tensor de deformación de Cauchy-Green.
- 3) Calcular la velocidad material y la velocidad espacial.
- 4) Calcular el alargamiento  $\lambda$  en el punto  $(X_1, X_2) = (1, 1)$ , en el instante  $t = 2$ , según la dirección  $\mathbf{e}_1$ .

**2.7** En un cierto instante, el campo de desplazamiento de un medio continuo es:

$$u_1 = (a_1 - 1)X_1, \quad u_2 = (a_2 - 1)X_2 + a_1X_1, \quad u_3 = (a_3 - 1)X_3,$$

siendo  $a_1, a_2, a_3$  tres constantes positivas. Determinar el valor de dichas constantes sabiendo que el sólido es incompresible, que un segmento paralelo al eje  $X_3$  no se alarga y que el área de un elemento situado en el plano  $X_1X_3$  no se ha modificado.

**2.8** Para la deformación definida por:

$$x_1 = X_1 + mX_3, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3 - mX_1,$$

donde  $m$  es una constante, hallar el volumen de la deformada de una esfera de centro  $(0, 0, 0)$  y radio  $R$ .



# Capítulo 4

## Leyes de balance y conservación

---

### 1. Introducción

Los cuerpos continuos, sin excepción, se comportan verificando unas leyes de balance o conservación. La Mecánica de Medios Continuos postula estas leyes, pues no son demostrables a partir de otros principios y constituyen, junto con la cinemática y los modelos constitutivos los tres pilares de esta disciplina.

Estas leyes de conservación, a saber, de la masa, de la cantidad de movimiento, del momento cinético y de la energía, son idénticas para todos los cuerpos: sólidos, fluidos y gases de todo tipo.

Estos principios de conservación subrayan el poder unificador de la Mecánica de Medios Continuos y su enunciado completo sólo es posible empleando el formalismo del cálculo y álgebra vectorial y tensorial explicado hasta el momento.

En este capítulo examinaremos estas relaciones de balance e identificaremos diferentes expresiones matemáticas que las expresan de forma precisa, y que se pueden emplear en problemas prácticos.

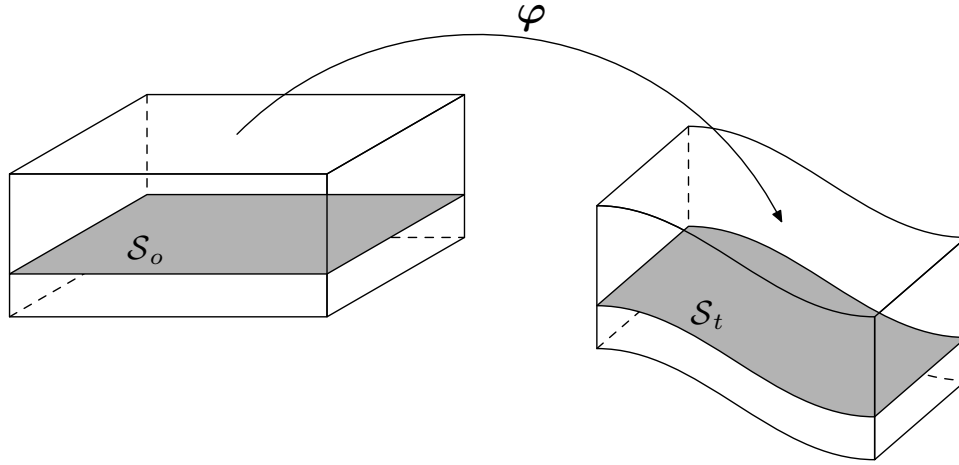


Figura 4.2.1: Superficie material

## 2. Curvas, superficies y volúmenes materiales

Para comenzar a explicar estos conceptos considérese el cuerpo  $\mathcal{B}_o$  sin deformar y una superficie cualquiera  $\mathcal{S}_o$  que intersecta al cuerpo. La expresión matemática de los puntos del cuerpo que están sobre esta superficie es una ecuación escalar de la forma

$$\mathbf{X} \in \mathcal{B}_o : \mathcal{S}_o(\mathbf{X}) = 0 . \quad (4.2.1)$$

Una *superficie material* es un conjunto de puntos que corresponden, en cada instante, a las posiciones que ocupan las partículas que constituían, en el instante inicial, la intersección de  $\mathcal{S}_o$  con el cuerpo. Esta “superficie material” se deforma a la par del cuerpo continuo, como una lámina de material insertada dentro del mismo. La expresión (4.2.1) es la “descripción material” de esta superficie, y la descripción espacial es por lo tanto

$$\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t : \mathcal{S}_t(\mathbf{x}, t) = 0 , \quad \text{donde} \quad \mathcal{S}_t = \mathcal{S}_o \circ \varphi_t^{-1} . \quad (4.2.2)$$

Se consideran ahora dos superficies materiales  $\mathcal{S}_o, \mathcal{T}_o$  con una intersección  $\mathcal{C}_o = \mathcal{S}_o \cap \mathcal{T}_o$ . Las partículas que en la configuración de referencia se encuentran sobre la curva  $\mathcal{C}_o$  forman una “curva material” que, al igual que la superficie material, se deforma acompañando al medio continuo donde se inscribe, como un hilo insertado en el mismo. La expresión matemática de esta superficie material puede hacerse, como siempre, mediante una expresión material o bien mediante una espacial. La “descripción material” de una curva material viene dada por dos ecuaciones escalares, las de las superficies cuya intersección la determina:

$$\mathbf{X} \in \mathcal{B}_o : \mathcal{S}_o(\mathbf{X}) = \mathcal{T}_o(\mathbf{X}) = 0 . \quad (4.2.3)$$

Similarmente, la descripción espacial resulta de la descripción espacial de las misma dos



superficies

$$\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t : \mathcal{S}_t(\mathbf{x}, t) = \mathcal{T}_t(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \text{donde} \quad S_t = \mathcal{S}_o \circ \varphi_t^{-1}, \quad T_t = \mathcal{T}_o \circ \varphi_t^{-1} \quad (4.2.4)$$

Finalmente, un volumen material es el conjunto de posiciones ocupadas, en todo instante, por las partículas que en el instante inicial se encuentran dentro de una región del cuerpo sin deformar  $\mathcal{B}_o$ . Otra forma de definir un volumen de control es a partir de las partículas que se encuentran “dentro” de una superficie de control cerrada. En cualquier caso, indicaremos como  $\mathcal{P}_o$  la descripción material de un volumen material y  $\mathcal{P}_t$  su descripción espacial.

En cualquiera de los tres casos considerados, si  $\Omega_o$  es el conjunto de partículas del conjunto material que consideramos, su posición en cualquier instante viene dada por la deformación del medio continuo, es decir,

$$\Omega_t = \varphi(\Omega_o, t). \quad (4.2.5)$$

### Derivadas de integrales sobre conjuntos materiales

En varias ocasiones, durante el transcurso de este capítulo, será necesario calcular la derivada de cantidades integrales definidas sobre conjuntos materiales. Por ejemplo, sea  $I$  una cantidad definida a través de una integral sobre un volumen material

$$I = \int_{\mathcal{P}_t} \psi(\mathbf{x}, t) dv, \quad (4.2.6)$$

donde  $\mathcal{P}_t = \varphi_t(\mathcal{P}_o)$  y  $\psi(\mathbf{x}, t)$  es una función escalar cualquiera definida sobre puntos del espacio. Si se desea calcular la derivada temporal de  $I$ , habrá que tener en cuenta que no sólo el integrando, sino también el dominio de integración, dependen del tiempo. Para realizar esta derivada basta con realizar un cambio de variable en el dominio de integración, expresándolo en un dominio de integración fijo, tomar las derivadas necesarias y deshacer el cambio de variable. El procedimiento, de forma detallada, es el siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_t} \psi(\mathbf{x}, t) dv \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\varphi_t(\mathcal{P}_o)} \psi(\mathbf{x}, t) dv \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_o} \psi(\varphi(\mathbf{X}, t), t) J(\mathbf{X}, t) dV \\ &= \int_{\mathcal{P}_o} (\dot{\psi}(\varphi(\mathbf{X}, t), t) J(\mathbf{X}, t) + \psi(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \dot{J}(\mathbf{X}, t)) dV \\ &= \int_{\mathcal{P}_o} (\dot{\psi}(\varphi(\mathbf{X}, t), t) J(\mathbf{X}, t) + \psi(\varphi(\mathbf{X}, t), t) J(\mathbf{X}, t) (\text{div } \mathbf{v})(\mathbf{X}, t)) dV \\ &= \int_{\mathcal{P}_t} (\dot{\psi}(\mathbf{x}, t) + \psi(\mathbf{x}, t) \text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) dv. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Se ha empleado que la derivada temporal del jacobiano es  $\dot{J} = J \text{div } \mathbf{v}$ .

Esta forma de calcular derivadas de cantidades materiales es válida también, con las modificaciones pertinentes, para derivar cantidades integrales sobre curvas y superficies materiales. La idea, como en el caso desarrollado, consiste siempre en transformar el dominio de integración en un dominio fijo que permita derivar sin problema dentro de la integral. Una vez realizadas estas derivadas, el cambio de variable ha de deshacerse.

### Teorema del transporte de Reynolds

La derivada temporal de una cantidad integral  $I$  definida sobre un volumen material  $\mathcal{P}_t = \varphi_t(\mathcal{P}_o)$  se ha calculado en la expresión (4.2.7). Esta cantidad admite una expresión alternativa que es objeto del siguiente teorema:

**Teorema 2.1:** *Sea  $\psi(\mathbf{x}, t)$  un campo escalar espacial. Para toda región material  $\mathcal{P}_t = \varphi_t(\mathcal{P}_o)$  con contorno  $\partial\mathcal{P}_t$  y normal exterior  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ , la derivada de la integral  $I$  definida en (4.2.6) viene dada por*

$$\dot{I} = \int_{\mathcal{P}_t} \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dv + \int_{\partial\mathcal{P}_t} \psi(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) da . \quad (4.2.8)$$

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar, observamos la relación elemental:

$$\dot{\psi} + \psi \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \operatorname{div}(\psi \mathbf{v}) . \quad (4.2.9)$$

A partir del desarrollo (4.2.7) y empleando el teorema de la divergencia se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \int_{\mathcal{P}_t} (\dot{\psi}(\mathbf{x}, t) + \psi(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) dv \\ &= \int_{\mathcal{P}_t} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + \operatorname{div}(\psi \mathbf{v}) \right) dv \\ &= \int_{\mathcal{P}_t} \frac{\partial \psi}{\partial t} dv + \int_{\partial\mathcal{P}_t} \psi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da . \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

■

El teorema de Reynolds indica que el cambio en la integral  $I$  tiene dos componentes: la primera se debe a la variación temporal de la función  $\psi$ , ignorando el cambio del dominio sobre el que se integra. La segunda contribución se debe al flujo saliente de la cantidad  $\psi$  a través de la superficie que delimita el volumen material  $\mathcal{P}_t$ .

### 3. Curvas, superficies y volúmenes de control

Además de los conjuntos tratados en la sección anterior existe otro tipo que también son de utilidad en la Mecánica de Medios Continuos, y en la teoría de campos en general. Bajo el nombre de *conjuntos de control* se hace referencia simplemente a conjuntos fijos en el espacio. Por ejemplo, una superficie de control podría ser un plano fijo en el espacio. A diferencia de las superficies materiales, las superficies de control pueden coincidir con la posición de partículas del medio continuo *que cambian con el tiempo*. Si el medio continuo se está deformando, es obvio que su intersección con una superficie fija (respectivamente, curva o volumen) corresponda a partículas distintas.

Las superficies y volúmenes de control son especialmente útiles en Mecánica de Fluidos, donde la posición en cada instante de las partículas del fluido suele ser irrelevante. En cambio, la interacción (de fuerza, calor, trabajo, etc) con un dominio fijo suele ser de interés. Por ejemplo considérese el flujo de agua a través de una tubería. El volumen de control que puede considerarse es el que queda delimitado por la superficie de la tubería y dos secciones transversales. Este dominio es fijo, y puede ser necesario conocer el comportamiento del agua que lo ocupa en un cierto instante. Un instante posterior, las partículas contenidas en dicha región habrán cambiado, aunque esta siga igual.

#### Flujo a través de una superficie de control

Sea  $\psi$  un campo escalar que indica la concentración en un medio continuo de una cierta cantidad por unidad de volumen. Por ejemplo, la salinidad en un fluido, la cantidad de contaminante en el mismo, etc. Considérese también una superficie de control  $\mathcal{S}$  con normal exterior  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ . Si se desea calcular el flujo de dicha cantidad a través de la superficie de control éste se puede calcular integrando los diferenciales de flujo  $d\phi$ :

$$d\phi = \psi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da . \quad (4.3.1)$$

Esta integral es pues

$$\phi = \int_{\mathcal{S}} d\phi = \int_{\mathcal{S}} \psi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da , \quad (4.3.2)$$

y sus unidades son las de la cantidad  $\psi$ , por unidad de tiempo.

### 4. Balance de masa

La masa de un medio continuo es una cantidad constante, al menos en los medios que consideramos en este curso. A partir de este postulado podemos obtener relaciones matemáticas que indican cómo se redistribuye la masa en un cuerpo. Existen varias maneras de expresar este postulado, todas ellas equivalentes, y en esta sección se presentan tres de ellas.

Antes de obtener las expresiones matemáticas del principio de conservación de masa definimos el concepto de densidad. Esta cantidad, que denominamos  $\rho$ , es la masa específica de un cuerpo y puede depender del punto y del instante en el que se calcule. Para definirla, se

considera una región  $\Omega(\mathbf{x})$  que contiene al punto  $\mathbf{x}$ , de volumen  $v(\mathbf{x})$  y con masa  $m(\Omega(\mathbf{x}), t)$ . Entonces se define

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \lim_{v(\mathbf{x}) \rightarrow 0} \frac{m(\Omega(\mathbf{x}), t)}{v(\mathbf{x})} . \quad (4.4.1)$$

A partir de la definición se observa que la densidad  $\rho$  es un campo escalar espacial. A la densidad en el instante  $t = 0$  se la denomina densidad de referencia y se escribe

$$\rho_o = \rho_o(\mathbf{X}) = \rho(\mathbf{X}, 0) . \quad (4.4.2)$$

La densidad de referencia es un campo escalar que no depende del tiempo.

### Expresión integral de la conservación de masa

El principio de conservación de masa se puede expresar matemáticamente indicando que la masa de cualquier volumen material del cuerpo continuo es la misma en todo instante:

$$\boxed{\int_{\mathcal{P}_o} \rho_o(\mathbf{X}) dV = \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) dv ,} \quad (4.4.3)$$

siendo, como siempre,  $\mathcal{P}_t = \varphi_t(\mathcal{P}_o)$ .

### Expresión diferencial Lagrangiana del principio de conservación de masa

La relación integral (4.4.3) expresa de forma muy clara el principio de conservación de masa pero no muy útil a la hora de resolver problemas. La expresión equivalente que ahora deducimos sí que se emplea con más facilidad.

A partir de la fórmula integral (4.4.3), y mediante un cambio de variable de la integral del lado derecho se obtiene la relación:

$$\int_{\mathcal{P}_o} \rho_o(\mathbf{X}) dV = \int_{\mathcal{P}_o} \rho(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \mathbf{J}(\mathbf{X}, t) dV . \quad (4.4.4)$$

Puesto que las dos integrales son iguales, y dicha igualdad es válida para cualquier región  $\mathcal{P}_o$ , los integrando han de ser iguales en todo punto, es decir

$$\boxed{\rho_o(\mathbf{X}) = \rho(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \mathbf{J}(\mathbf{X}, t) .} \quad (4.4.5)$$

Como todas las cantidades en esta igualdad dependen de las coordenadas materiales del punto (y del tiempo), se dice que es la expresión Lagrangiana de la conservación de masa. A veces, por un cierto abuso de notación, se escribe simplemente  $\rho_o = J\rho$ , aunque ha de quedar claro cuáles son los argumentos de cada uno de los campos involucrados.

### Expresión diferencial Euleriana. Ecuación de continuidad

El principio de conservación de la masa expresa que la masa de una región material cualquiera  $\mathcal{P}_o$  en un medio continuo, calculada mediante (4.4.3) es una cantidad fija y por lo tanto su derivada temporal es nula. Si llamamos  $m(\mathcal{P}_o)$  a la masa total de dicha región material, mediante la fórmula (4.2.7) se tiene que

$$\dot{m}(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} (\dot{\rho}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \, dv . \quad (4.4.6)$$

Puesto que esta relación ha de ser válida para cualquier región material, el integrando debe de anularse. Se deduce que la expresión diferencial de la ley de conservación de masa se puede expresar también como:

$$\dot{\rho}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0 . \quad (4.4.7)$$

Los campos que aparecen en esta última expresión depende de las coordenadas espaciales  $\mathbf{x}$  y del tiempo, y por lo tanto es una relación *Euleriana*. Nótese que la derivada temporal de la densidad que aparece en la expresión anterior es la derivada temporal material, es decir, cuando la derivada parcial respecto al tiempo cuando la partícula  $\mathbf{X}$  permanece constante. Mediante las fórmulas estudiadas en el capítulo de cinemática la expresión (4.4.7) se puede desarrollar de la siguiente manera:

$$0 = \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{grad} \rho(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) , \quad (4.4.8)$$

o de forma más compacta:

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = 0 . \quad (4.4.9)$$

Esta última expresión diferencial se conoce como la ecuación de continuidad.

### Balance de masa en un volumen de control

Sea  $\mathcal{P}$  un volumen *de control* cualquiera, con contorno  $\partial\mathcal{P}$  de normal exterior  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ . El cambio de la masa total de dicho volumen se puede calcular, empleando la ecuación de continuidad y el teorema de la divergencia, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{m}(\mathcal{P}) &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \rho(\mathbf{x}, t) \, dv = \int_{\mathcal{P}} \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \, dv \\ &= - \int_{\mathcal{P}} \operatorname{div} (\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \, dv = - \int_{\partial\mathcal{P}} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, da . \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

Esta expresión indica que el cambio de la masa contenida en la región de control es debido al flujo saliente de masa.

**Ejercicio 4.1:** Sea  $\psi(\mathbf{x}, t)$  un campo espacial escalar, vectorial o tensorial y  $\mathcal{P}_t$  una región material de un cuerpo continuo. Demostrar que la siguiente identidad:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \dot{\psi}(\mathbf{x}, t) dv . \quad (4.4.11)$$

Para demostrar la identidad basta con emplear el mismo proceso que en la ‘sec-material’, transformando la integral a un dominio constante:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}, t) dv &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_o} \rho(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \psi(\varphi(\mathbf{X}, t), t) J(\mathbf{X}, t) dV \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_o} \rho_o(\mathbf{X}) \psi(\varphi(\mathbf{X}, t), t) dV \\ &= \int_{\mathcal{P}_o} \rho_o(\mathbf{X}) \dot{\psi}(\varphi(\mathbf{X}, t), t) dV \\ &= \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \dot{\psi}(\mathbf{x}, t) dv \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

□

### Incompresibilidad

Se dice que una deformación es isocórica cuando el volumen de toda región material permanece constante durante la misma. Para ello es imprescindible que el jacobiano de la deformación  $J = \det \mathbf{F}$ , que expresa el cambio de volumen diferencial, sea constante y de valor unidad. Un cuerpo continuo es incompresible si únicamente admite deformaciones isocóricas.

Otras expresiones equivalentes de la condición de incompresibilidad se pueden obtener a partir de las ecuaciones del balance de masa (4.4.5) y (4.4.7):

$$J(\mathbf{X}, t) = 1 \Leftrightarrow \rho(\mathbf{x}, t) = \rho_o(\mathbf{X}) \Leftrightarrow \dot{\rho}(\mathbf{x}, t) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (4.4.13)$$

**Ejemplo 4.2:** Demostrar que un flujo cuyo campo de velocidad espacial es:

$$\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{3x_2}{x_1^2 + x_2^2} \mathbf{e}_1 - \frac{3x_1}{x_1^2 + x_2^2} \mathbf{e}_2 , \quad (4.4.14)$$

es incompresible.

Basta con calcular la divergencia del campo de velocidades:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(x_1, x_2, x_3, t) = -6x_1x_2 \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + 6x_1x_2 \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = 0 . \quad (4.4.15)$$

□

**Ejemplo 4.3:** Un sólido sufre una deformación de valor

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) = e^{-t} X_1 \mathbf{e}_1 + e^{-t} X_2 \mathbf{e}_2 + e^{2t} X_3 \mathbf{e}_3 . \quad (4.4.16)$$

Demostrar que la deformación es incompresible.

Si se calcula el gradiente de la deformación  $\mathbf{F}$  y su determinante:

$$[\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)] = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} , \quad J(\mathbf{X}, t) = \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = 1 , \quad (4.4.17)$$

se comprueba que éste último es constante y tiene valor unidad, con lo que se verifica la incompresibilidad de la deformación.  $\square$

## 5. Balance de cantidad de movimiento

La segunda ley de Newton, que establece la proporcionalidad entre las fuerzas aplicadas sobre un sistema de partículas y el cambio en su cantidad de movimiento, es válida también en el contexto de los medios continuos. Para este tipo de cuerpos se establecen a continuación las expresiones integrales y diferenciales de esta ley.

En primer lugar definimos el concepto de *cantidad de movimiento*  $\mathbf{L}$  de una región material cualquiera  $\mathcal{P}_t = \boldsymbol{\varphi}_t(\mathcal{P}_o)$  de un cuerpo continuo. Esta cantidad viene dada por la suma (integral) de la cantidad de movimiento de cada una de las partículas que lo conforman, es decir,

$$\mathbf{L}(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_o} \rho_o(\mathbf{X}) \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) dV = \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dv . \quad (4.5.1)$$

En la expresión anterior se presentan la forma Lagrangiana y Euleriana de la cantidad de movimiento de la región  $\mathcal{P}_t$ .

La región  $\mathcal{P}_t$  puede estar sometida a fuerzas exteriores de origen másico o de contacto sobre su contorno  $\partial\mathcal{P}_t$ . Las fuerzas exteriores aplicadas sobre un cuerpo continuo por unidad de masa en la configuración deformada están descritas por el campo vectorial  $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ . Las fuerzas sobre el contorno, definidas por unidad de superficie en la configuración deformada, se indicarán como  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$ .

Para los desarrollos que siguen definimos el campo de fuerzas por unidad de masa en la configuración de referencia  $\mathbf{B}$  y el campo de fuerzas de superficie por unidad de área en la configuración de referencia  $\mathbf{T}$  mediante las fórmulas:

$$\mathbf{B}(\mathbf{X}, t) = (\mathbf{b} \circ \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{X}, t) , \quad \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) dA = (\mathbf{t} \circ \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{X}, t) da . \quad (4.5.2)$$

La resultante de todas las fuerzas que actúan sobre la región material  $\mathcal{P}_t$  se puede expresar de las dos maneras siguientes:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{ext}(\mathcal{P}_t) &= \int_{\mathcal{P}_o} \rho_o(\mathbf{X}) \mathbf{B}(\mathbf{X}, t) dV + \int_{\partial\mathcal{P}_o} \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) dA \\ &= \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{X}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) da . \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

### Expresión integral del balance de cantidad de movimiento

La ley de balance de la cantidad de movimiento establece (no es demostrable) la validez de la segunda ley de Newton en sistemas continuos, es decir, que para toda región material  $\mathcal{P}_t = \varphi_t(\mathcal{P}_o)$

$$\mathbf{F}_{ext}(\mathcal{P}_t) = \dot{\mathbf{L}}(\mathcal{P}_t) . \quad (4.5.4)$$

Empleando el resultado (4.4.11) y las definiciones ('sec-momento') y 4.5.1, obtenemos la expresión integral del balance de la cantidad de movimiento

$$\int_{\mathcal{P}_o} \rho_o(\mathbf{X}) \dot{\mathbf{V}}(\mathbf{X}, t) dV = \int_{\mathcal{P}_o} \rho_o(\mathbf{X}) \mathbf{B}(\mathbf{X}, t) dV + \int_{\partial\mathcal{P}_o} \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) dA , \quad (4.5.5)$$

en su forma Lagrangiana, siendo  $\mathbf{A}(\mathbf{X}, t) = \dot{\mathbf{V}}(\mathbf{X}, t)$ . De forma similar, la forma Euleriana de esta ley de balance es:

$$\int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{X}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) da , \quad (4.5.6)$$

donde la  $\mathbf{a} = \mathbf{A} \circ \varphi_t^{-1} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$  es la aceleración espacial.

### Expresión diferencial Euleriana del balance de cantidad de movimiento

De la misma manera que la ley de conservación de masa, la ley de balance de la cantidad de movimiento se puede formular para volúmenes diferenciales sin más que emplear alguna relación del cálculo integral de tensores. Para obtener la expresión Euleriana diferencial, recordamos del tema 2 que la fuerza por unidad de superficie que se ejerce sobre una parte cualquiera de un medio continuo es

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}(\mathbf{x}) , \quad (4.5.7)$$

siendo  $\boldsymbol{\sigma}$  el tensor de tensiones de Cauchy. Empleando esta última expresión y el teorema de la divergencia podemos transformar la integral de superficie de las fuerzas externas sobre  $\mathcal{P}_t$  en una integral de volumen:

$$\int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) da = \int_{\partial\mathcal{P}_t} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}(\mathbf{x}) da = \int_{\mathcal{P}_t} \text{div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) dv . \quad (4.5.8)$$

Por lo tanto, para cualquier parte material  $\mathcal{P}_t$  del medio continuo, la expresión Euleriana integral del balance de cantidad de movimiento se puede expresar como:

$$\int_{\mathcal{P}_t} (\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \text{div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) - \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)) dv = 0 . \quad (4.5.9)$$

Como esta última expresión se anula para cualquier región material, el integrando ha de ser cero y concluimos

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) . \quad (4.5.10)$$



### Expresión diferencial Lagrangiana del balance de cantidad de movimiento

En numerosas ocasiones, fundamentalmente relacionadas con el tratamiento y formulación de problemas relacionados con cuerpos sólidos, resulta práctico emplear una formulación Lagrangiana de la ley de balance de cantidad de movimiento. Esta formulación, que se presenta a continuación, permite expresar la relación de equilibrio en función de cantidades, tensoriales y vectoriales, que dependen de las coordenadas materiales  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_o$  y que tienen una interpretación “geométrica” relacionada con la configuración de referencia del sólido.

El primer objeto que se define es el llamado “primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff” y se representa con la letra  $\mathbf{P}$ . Este es un tensor de segundo orden, no necesariamente simétrico, y definido como

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}, t) = J(\mathbf{X}, t) (\boldsymbol{\sigma} \circ \boldsymbol{\varphi}_t)(\mathbf{X}, t) \mathbf{F}^{-T}(\mathbf{X}, t). \quad (4.5.11)$$

El origen de este tensor es el siguiente. La fuerza que se aplica sobre un diferencial del contorno de un cuerpo desde el exterior es  $\mathbf{t} da$ . La relación que existe entre elementos de área en la configuración de referencia y la configuración deformada es  $\mathbf{n} da = J \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} dA$ , siendo  $\mathbf{N}$  el vector normal al contorno del cuerpo en su configuración de referencia, y  $dA$  su superficie. Por lo tanto, tenemos que

$$\mathbf{t} da = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} da = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} dA = \mathbf{P} \mathbf{N} dA = \mathbf{T} dA. \quad (4.5.12)$$

Para obtener la expresión diferencial Lagrangiana del balance de cantidad de movimiento transformamos las integrales que aparecen en

$$\int_{\partial \mathcal{P}_o} \mathbf{T} dA = \int_{\partial \mathcal{P}_o} \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) \mathbf{N}(\mathbf{X}) dA = \int_{\mathcal{P}_o} \text{DIV } \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) dV. \quad (4.5.13)$$

$$\int_{\mathcal{P}_o} (\rho_o(\mathbf{X}) \mathbf{A}(\mathbf{X}, t) - \text{DIV } \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) - \rho_o(\mathbf{X}) \mathbf{B}(\mathbf{X}, t)) dV = 0. \quad (4.5.14)$$

Puesto que la integral se anula para cualquier región material, el integrando ha de anularse también y se puede concluir

$$\boxed{\text{DIV } \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) + \rho_o(\mathbf{X}) \mathbf{B}(\mathbf{X}, t) = \rho_o(\mathbf{X}) \mathbf{A}(\mathbf{X}, t)} \quad (4.5.15)$$

Las expresiones del balance de cantidad de movimiento se vieron, en una versión simplificada, en el capítulo sobre análisis de tensiones. La única diferencia es que en la sección actual hemos incluido el efecto de las fuerzas de inercia obteniendo la expresión más general posible del balance de fuerzas.

## 6. Balance de momento cinético

La ley de balance del momento cinético, propuesta por Euler, expresa que en un sistema mecánico el momento de las fuerzas externas es igual al cambio del momento cinético del mismo. En esta sección estudiamos las consecuencias de aplicar este principio a la dinámica de los medios continuos.

En primer lugar escribimos el momento cinético de un medio continuo como la suma (integral) del momento cinético de cada diferencial de volumen que lo forma. De esta manera, para cualquier región material  $\mathcal{P}_t = \varphi(\mathcal{P}_o)$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathcal{P}_t) &= \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} \wedge \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dv \\ &= \int_{\mathcal{P}_o} \rho_o(\mathbf{X}) \varphi(\mathbf{X}, t) \wedge \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) dV . \end{aligned} \quad (4.6.1)$$

El momento de las fuerzas exteriores sobre la región  $\mathcal{P}_t$ , que llamaremos  $\mathbf{M}_{ext}$ , también se puede expresar de forma euleriana o lagrangiana:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ext}(\mathcal{P}_t) &= \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} \wedge \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{x} \wedge \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) da \\ &= \int_{\mathcal{P}_o} \rho_o(\mathbf{X}, t) \varphi(\mathbf{X}, t) \wedge \mathbf{B}(\mathbf{X}, t) dV + \int_{\partial\mathcal{P}_o} \varphi(\mathbf{X}, t) \wedge \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) dA . \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

**Ejercicio 6.1:** Demostrar que las expresiones lagrangianas y eulerianas del momento cinético y del momento de las fuerzas exteriores son equivalentes.  $\square$

### Expresión integral del balance de la cantidad de movimiento

La ley del balance de la cantidad de movimiento establece, como se indicó anteriormente, que la tasa de variación del momento cinético es igual al momento de las fuerzas exteriores aplicadas. Empleando la notación definida, esta ley se escribe de la siguiente manera:

$$\dot{\mathbf{J}}(\mathcal{P}_t) = \mathbf{M}_{ext}(\mathcal{P}_t) . \quad (4.6.3)$$

El término de la derivada temporal  $\dot{\mathbf{J}}$  se puede desarrollar utilizando la expresión (4.6.1) y la propiedad (4.4.11)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{J}}(\mathcal{P}_t) &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} \wedge \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dv \\ &= \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \frac{d}{dt} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) dv \\ &= \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) (\dot{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)) dv \\ &= \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \wedge \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{x} \wedge \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)) dv \\ &= \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} \wedge \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) dv . \end{aligned} \quad (4.6.4)$$

Por tanto, la expresión integral euleriana del balance del momento cinético queda:

$$\boxed{\int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} \wedge \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} \wedge \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{x} \wedge \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) da .} \quad (4.6.5)$$

La expresión integral lagrangiana del balance de momento cinético se obtiene fácilmente a partir de la última expresión y resulta:

$$\int_{\mathcal{P}_o} \rho_o(\mathbf{X}) \varphi(\mathbf{X}, t) \wedge \mathbf{A}(\mathbf{X}, t) dV = \int_{\mathcal{P}_o} \rho_o(\mathbf{X}) \varphi(\mathbf{X}, t) \wedge \mathbf{B}(\mathbf{X}, t) dV + \int_{\partial \mathcal{P}_o} \varphi(\mathbf{X}, t) \wedge \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) dA . \quad (4.6.6)$$

**Ejercicio 6.2:** Demostrar que las expresiones (4.6.5) y (4.6.6) son equivalentes. □

### Expresión diferencial del balance de momento cinético

Al igual que en el caso de las dos leyes de balance estudiadas anteriormente, la expresión integral del balance de momento cinético es fácil de obtener pero de utilidad limitada para la resolución de problemas. A continuación buscamos una expresión diferencial de (4.6.5) que, como veremos, es mucho más compacta, y de gran utilidad.

La consecuencia final del balance de momento cinético es la simetría del tensor de tensiones de Cauchy. Este resultado ya había sido obtenido en el capítulo de análisis de tensiones y ahora su validez quedará patente incluso en el caso de situaciones dinámicas.

Para poder encontrar la expresión diferencial de (4.6.5) se necesita demostrar dos resultados preliminares. Por simplicidad, en estas demostraciones ignoramos la dependencia de los campos vectoriales y tensoriales sobre las variables  $(\mathbf{x}, t)$ . El primero es:

$$\int_{\partial \mathcal{P}_t} \mathbf{x} \wedge \mathbf{t} da = \int_{\mathcal{P}_t} (\epsilon_{ijk} \sigma_{kl} \mathbf{e}_j + \mathbf{x} \wedge \text{div } \boldsymbol{\sigma}) dv . \quad (4.6.7)$$

Para demostrar este resultado se emplea el tensor hemisimétrico  $\widehat{\mathbf{x}}$ , definido por la relación  $\widehat{\mathbf{x}}\mathbf{a} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{a}$ , para cualquier vector  $\mathbf{a}$ . La integral en el lado izquierdo de (4.6.7) se puede transformar mediante el teorema de la divergencia de la siguiente manera:

$$\int_{\partial \mathcal{P}_t} \mathbf{x} \wedge \mathbf{t} da = \int_{\partial \mathcal{P}_t} \mathbf{x} \wedge (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) da = \int_{\partial \mathcal{P}_t} \widehat{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} da = \int_{\mathcal{P}_t} \text{div} (\widehat{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma}) dv . \quad (4.6.8)$$

Los términos dentro de la integral de volumen se operan, empleando notación indicial, como sigue:

$$\begin{aligned} \text{div} (\widehat{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma}) &= \text{div} (\epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l) \\ &= \epsilon_{ijk} (x_{j,l} \sigma_{kl} + x_j \sigma_{kl,l}) \mathbf{e}_i \\ &= \epsilon_{ijk} (\delta_{jl} \sigma_{kl} + x_j \sigma_{kl,l}) \mathbf{e}_i \\ &= \epsilon_{ijk} \sigma_{kj} + \mathbf{x} \wedge \text{div } \boldsymbol{\sigma} . \end{aligned} \quad (4.6.9)$$

Sustituyendo esta última identidad en la integral (4.6.8) se demuestra el primer resultado.

El segundo resultado afirma que la identidad  $\epsilon_{ijk}\sigma_{kj} = 0$  es cierta si y sólo si el tensor  $\sigma$  es simétrico. Para verificarla basta con fijar el valor del índice  $i$ , por ejemplo  $i = 1$ . Entonces, desarrollando la suma en los índices repetidos se obtiene

$$0 = \epsilon_{1jk}\sigma_{kj} = \epsilon_{123}\sigma_{32} + \epsilon_{132}\sigma_{23} = \sigma_{32} - \sigma_{23} , \quad (4.6.10)$$

lo cual implica que  $\sigma_{23} = \sigma_{32}$ . Repitiendo el mismo argumento con  $i = 2, 3$  se obtiene que  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ .

Finalmente obtenemos la expresión diferencial del balance de momento cinético. La expresión euleriana de esta ley, descrita por la ecuación (4.6.5) se puede reescribir como:

$$\int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{x} \wedge (\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)) dv = \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{x} \wedge \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) da . \quad (4.6.11)$$

El lado de la izquierda se puede transformar empleando la ley del balance de cantidad de movimiento:

$$\int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{x} \wedge (\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)) dv = \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{x} \wedge \operatorname{div} \sigma(\mathbf{x}, t) dv . \quad (4.6.12)$$

El lado de la derecha de (4.6.12) se puede transformar utilizando el resultado (4.6.7). Igualando estas dos ecuaciones transformadas se obtiene

$$\int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{x} \wedge \operatorname{div} \sigma(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\mathcal{P}_t} (\epsilon_{ijk}\sigma_{kl}\mathbf{e}_j + \mathbf{x} \wedge \operatorname{div} \sigma) dv . \quad (4.6.13)$$

Puesto que esta última expresión se cumple para cualquier región material  $\mathcal{P}_t$ , se debe verificar que  $\epsilon_{ijk}\sigma_{kl} = 0$ , y por lo tanto concluimos

$$\boxed{\sigma(\mathbf{x}, t) = \sigma^T(\mathbf{x}, t)} . \quad (4.6.14)$$

Esta relación obtenida es la expresión euleriana diferencial de la ley de balance del momento cinético. Es inmediato comprobar que a partir de esta expresión y de la definición del tensor de Piola-Kirchhoff, la expresión lagrangiana diferencial de este mismo principio ha de ser:

$$\boxed{\mathbf{P}(\mathbf{X}, t)\mathbf{F}^T(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)\mathbf{P}(\mathbf{X}, t)^T} . \quad (4.6.15)$$

**Ejercicio 6.3:** Demostrar (4.6.15). □

## 7. Balance de energía

En este apartado se tratan por primera vez en el curso aspectos de los medios continuos que no son puramente mecánicos. Se abordan, en particular, cuestiones relacionadas con la transformación de la energía mediante procesos mecánicos y térmicos, y su relación con el primer principio de la termodinámica.

Recordamos, en primer lugar, el concepto de potencia, definido de forma genérica como el trabajo realizado por unidad de tiempo. Sus unidades en el sistema internacional son los watios ( $W = Pa/s$ ). En el contexto de los medios continuos consideramos  $\mathcal{P}_t$  una región material cualquiera. Se define la *potencia mecánica*  $P_{ext}$  que se realiza sobre ella como el trabajo por unidad de tiempo que efectúan las fuerzas exteriores, es decir,

$$P_{ext}(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) da . \quad (4.7.1)$$

### El teorema de las fuerzas vivas

Cuando se aplica un trabajo exterior a un cuerpo continuo, éste se transforma en otras formas de energía. Sin entrar en los detalles sobre las posibles transformaciones termodinámicas, que ya se verán más adelante, se puede realizar un sencillo balance energético simplemente a partir de la ecuación del balance de cantidad de movimiento. En primer lugar definimos la *energía cinética*  $K$  de una región material cualquiera  $\mathcal{P}_t$  a partir de la energía de cada una de sus partes diferenciales:

$$K(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} \frac{1}{2} \rho(\mathbf{x}, t) |\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)|^2 dv , \quad (4.7.2)$$

y también definimos un tipo de potencia llamado “potencia tensional” y que tiene la expresión

$$P_{ten}(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) dv , \quad (4.7.3)$$

siendo  $\mathbf{d} = \text{sim}[\text{grad } \mathbf{v}]$ , la tasa de deformación.

**Teorema 7.1:** *La potencia exterior que se aplica sobre un volumen material cualquiera  $\mathcal{P}_t$  de un cuerpo continuo se invierte en incrementar su energía cinética y en potencia tensional, es decir,*

$$P_{ext}(\mathcal{P}_t) = \dot{K}(\mathcal{P}_t) + P_{ten}(\mathcal{P}_t) . \quad (4.7.4)$$

DEMOSTRACIÓN: En esta demostración no aparecen, por simplificar, los argumentos de todas los campos que se utilizan. Para probar el teorema empleamos la siguiente identidad tensorial,

que resulta del teorema de la divergencia y del balance de la cantidad de movimiento:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, da &= \int_{\partial\mathcal{P}_t} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, da \\
&= \int_{\partial\mathcal{P}_t} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, da \\
&= \int_{\mathcal{P}_t} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{v}) \, dv \\
&= \int_{\mathcal{P}_t} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v}) \, dv \\
&= \int_{\mathcal{P}_t} ((\rho \mathbf{a} - \rho \mathbf{b}) \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d}) \, dv .
\end{aligned} \tag{4.7.5}$$

Utilizando esta identidad en la definición de la potencia externa se obtiene:

$$P_{ext}(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} (\rho \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d}) \, dv = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_t} \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \, dv + P_{ten}(\mathcal{P}_t) = \dot{K}(\mathcal{P}_t) + P_{ten}(\mathcal{P}_t) . \tag{4.7.6}$$

■

### Observaciones 7.2:

- i. El teorema de las fuerzas vivas no es un resultado termodinámico sino puramente mecánico. De forma simplificada considera que la energía aportada a un cuerpo continuo o bien se transforma en incrementar/disminuir la energía de su movimiento global (la energía cinética) o bien se transforma “en otra cosa”, la potencia tensional. Los efectos termodinámicos aparecen cuando se intenta comprender con más detalle el contenido de la potencia tensional.
- ii. En un cuerpo rígido, la tasa de deformación  $\mathbf{d}$  es nula con lo cual toda la potencia exterior aplicada ha de transformarse en cambiar su energía cinética. □

### Expresión Lagrangiana del teorema de las fuerzas vivas

Como en todos los desarrollos anteriores, el teorema de las fuerzas vivas se puede expresar, de forma completamente equivalente, empleando campos Lagrangianos. Para ello, basta con reformular los diversos tipos de energía y potencia que se han definido anteriormente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
P_{ext}(\mathcal{P}_t) &= \int_{\mathcal{P}_o} \rho_o(\mathbf{X}) \mathbf{B}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \, dV + \int_{\partial\mathcal{P}_o} \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \, dA , \\
K(\mathcal{P}_t) &= \int_{\mathcal{P}_o} \frac{1}{2} \rho_o(\mathbf{X}, t) |\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)|^2 \, dV , \\
P_{ten}(\mathcal{P}_t) &= \int_{\mathcal{P}_o} \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) \cdot \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t) \, dV .
\end{aligned} \tag{4.7.7}$$

La equivalencia de las tres formas de potencia se con sus respectivas expresiones Eulerianas se deja como ejercicio.

**Ejercicio 7.3:** Demostrar que la potencia tensional también se puede expresar de la siguiente manera:

$$P_{ten}(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_o} \mathbf{S}(\mathbf{X}, t) \cdot \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{X}, t) dV , \quad (4.7.8)$$

siendo  $\mathbf{S}$  el segundo tensor de Piola-Kirchhoff y  $\mathbf{E}$  el tensor de deformación de Green-Lagrange.

Para demostrar la identidad basta con notar que

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F} \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{S} \cdot \text{sim}[\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}}] = \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{E}} . \quad (4.7.9)$$

□

### El primer principio de la termodinámica

El primer principio de la termodinámica postula que la energía no se crea ni se destruye, sino que únicamente se transforma. En esta sección estudiamos las posibles transformaciones entre energía mecánica y térmica de los cuerpos continuos.

Antes de estudiar sus posibles transformaciones energéticas definimos la *potencia térmica* o *calorífica* suministrada a una región  $\mathcal{P}_t$  material de un cuerpo continuo como la cantidad:

$$P_{cal}(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) r(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\partial \mathcal{P}_t} h(\mathbf{x}, t) da . \quad (4.7.10)$$

En esta expresión,  $r$  es la tasa de calor suministrado o generado por unidad de masa y tiempo en el medio continuo. Este calor puede tener origen químico, radioactivo, etc. De forma similar,  $h$  es la tasa de calor que entra por unidad de área y tiempo, a través de su contorno, en la región material. El vector “flujo de calor”, por unidad de área y tiempo es  $\mathbf{q}$  de forma que

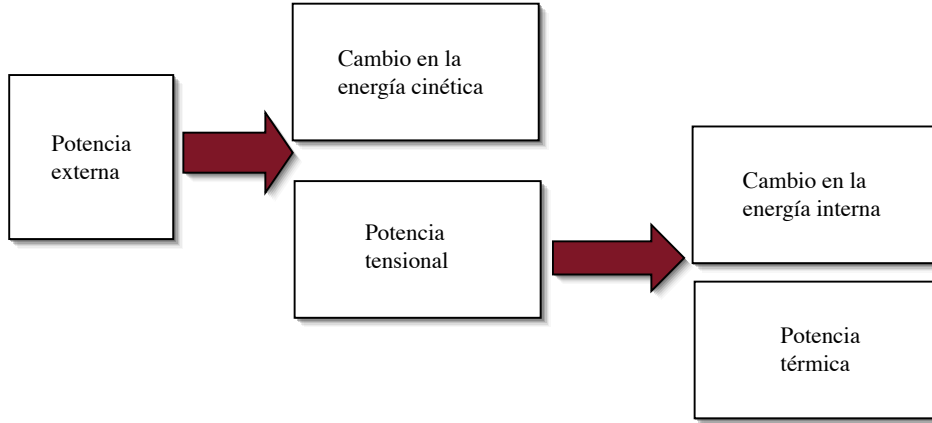
$$h(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) . \quad (4.7.11)$$

Usando este último vector, la potencia térmica se puede expresar de forma equivalente como:

$$\begin{aligned} P_{cal}(\mathcal{P}_t) &= \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) r(\mathbf{x}, t) dv - \int_{\partial \mathcal{P}_t} \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) da \\ &= \int_{\mathcal{P}_t} (\rho(\mathbf{x}, t) r(\mathbf{x}, t) - \text{div} \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)) dv . \end{aligned} \quad (4.7.12)$$

El primer principio de la termodinámica, enunciado cualitativamente anteriormente, se puede expresar ahora de forma más precisa. Para cualquier región material  $\mathcal{P}_t$ , existe una función  $E$  llamada *energía*, que depende únicamente del estado de dicha región, tal que su variación en el tiempo es igual a la suma de la potencia exterior y calorífica suministradas a dicha región. De forma matemática:

$$\dot{E}(\mathcal{P}_t) = P_{ext}(\mathcal{P}_t) + P_{cal}(\mathcal{P}_t) . \quad (4.7.13)$$



**Figura 4.7.1:** Esquema de la transformación de la energía. La flecha de la izquierda es resultado del teorema de las fuerzas vivas. La flecha de la derecha es debida al primer principio de la termodinámica.

El primer principio de la termodinámica también postula la existencia de una cantidad intensiva y de estado, la *energía interna*  $U$  definida a partir de la integral

$$U(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) u(\mathbf{x}, t) dv , \quad (4.7.14)$$

tal que la energía total de una región material  $\mathcal{P}_t$  se pueda expresar como la suma de la energía interna y la cinética:

$$E(\mathcal{P}_t) = K(\mathcal{P}_t) + U(\mathcal{P}_t) . \quad (4.7.15)$$

Utilizando el teorema de las fuerzas vivas (4.7.4) y la expresión (4.7.13), la ecuación anterior se puede escribir también de la siguiente manera:

$$\dot{E}(\mathcal{P}_t) = \dot{K}(\mathcal{P}_t) + \dot{U}(\mathcal{P}_t) = \dot{K}(\mathcal{P}_t) + P_{ten}(\mathcal{P}_t) + P_{cal}(\mathcal{P}_t) , \quad (4.7.16)$$

y simplificando,

$$\dot{U}(\mathcal{P}_t) = P_{ten}(\mathcal{P}_t) + P_{cal}(\mathcal{P}_t) . \quad (4.7.17)$$

Esta última expresión indica que el cambio en energía interna de una región en un cuerpo continuo se debe a la potencia tensional aplicada sobre él y a la potencia térmica suministrada. También se puede entender, por tanto, que la potencia tensional que se aplica a un cuerpo se puede transformar en incrementar la energía interna del mismo o convertirse en energía térmica, que sale del mismo (por ello el signo negativo):

$$P_{ten}(\mathcal{P}_t) = \dot{U}(\mathcal{P}_t) - P_{cal}(\mathcal{P}_t) . \quad (4.7.18)$$

La expresión (4.7.17) se puede expresar integralmente como:

$$\int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \dot{u}(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\mathcal{P}_t} [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) r(\mathbf{x}, t) - \text{div } \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)] dv . \quad (4.7.19)$$



Como dicha expresión ha de cumplirse para cualquier región  $\mathcal{P}_t$ , también ha de verificarse a nivel diferencial, es decir,

$$\rho(\mathbf{x}, t) \dot{u}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) r(\mathbf{x}, t) - \operatorname{div} \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \quad (4.7.20)$$

que no es sino la expresión Euleriana del primer principio de termodinámica en medios continuos.

## 8. La segunda ley de la termodinámica

El primer principio de la termodinámica enunciado en la sección anterior explica el balance energético en procesos de cuerpos continuos que incluyen efectos térmicos y dinámicos. Sin embargo este principio no proporciona información alguna sobre la posibilidad de que un determinado proceso ocurra o no. Este dato lo proporciona el segundo principio de la termodinámica.

El segundo principio de la termodinámica postula lo siguiente:

1. Existe una función de estado intensiva  $\theta$ , llamada la temperatura absoluta, cuyo valor es siempre positivo y es únicamente función de la “temperatura empírica”, esto es, la que podemos medir con un termómetro, en una escala cualquiera.
2. Existe otra función de estado, llamada entropía y designada con el símbolo  $S$  con las siguientes propiedades
  - i. Es una función extensiva, es decir, que la entropía  $S$  de una región material  $\mathcal{P}_t = \mathcal{P}_t^1 \cup \mathcal{P}_t^2$ , con  $\mathcal{P}_t^1 \cap \mathcal{P}_t^2 = \emptyset$  es la suma de la entropía de sus partes  $\mathcal{P}_t^1$  y  $\mathcal{P}_t^2$ . A partir de la entropía total se puede definir una entropía específica  $s$ , es decir, por unidad de masa, con lo que se tiene

$$S(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) s(\mathbf{x}, t) dv . \quad (4.8.1)$$

- ii. Se define la entropía generada en la región  $\mathcal{P}_t$  por unidad de tiempo como

$$\Gamma(\mathcal{P}_t) = \dot{S}(\mathcal{P}_t) - \int_{\mathcal{P}_t} \rho \frac{r}{\theta} dv + \int_{\partial \mathcal{P}_t} \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} da . \quad (4.8.2)$$

En todo proceso físico se cumple que la producción de entropía es no negativo, es decir,

$$\Gamma(\mathcal{P}_t) \geq 0 . \quad (4.8.3)$$

Cuando en un proceso la producción de entropía es nula, el proceso es reversible. Cuando es positiva, el proceso es irreversible. Un proceso con disminución de entropía no se puede dar.

La desigualdad (4.8.3) se llama la desigualdad de Clausius-Duhem y es la forma de la segunda ley de la termodinámica que más se emplea en Mecánica de Medios Continuos. Sin embargo, hay que indicar que no hay unanimidad en este tema y algunos autores no aceptan su validez.

Para establecer una expresión diferencial del segundo principio de la termodinámica transformamos la integral (4.8.2) empleando el teorema de la divergencia:

$$\begin{aligned}
\Gamma(\mathcal{P}_t) &= \int_{\mathcal{P}_t} \rho \dot{s} \, dv - \int_{\mathcal{P}_t} \rho \frac{r}{\theta} \, dv + \int_{\mathcal{P}_t} \operatorname{div} \left[ \frac{\mathbf{q}}{\theta} \right] \, dv \\
&= \int_{\mathcal{P}_t} \left[ \rho \dot{s} - \rho \frac{r}{\theta} + \operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{\theta} \right] \, dv \\
&= \int_{\mathcal{P}_t} \left[ \rho \dot{s} - \rho \frac{r}{\theta} + \frac{1}{\theta} \operatorname{div} \mathbf{q} - \frac{1}{\theta^2} \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \theta \right] \, dv .
\end{aligned} \tag{4.8.4}$$

Para continuar definimos dos tipos de fuentes de entropía. El primero es la producción local de entropía específica  $\gamma_{loc}$  y definida como:

$$\gamma_{loc} = \dot{s} - \frac{r}{\theta} + \frac{\mathbf{q}}{\rho \theta} . \tag{4.8.5}$$

La segunda es la producción de entropía específica por conducción térmica  $\gamma_{con}$ :

$$\gamma_{con} = -\frac{1}{\rho \theta^2} \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \theta . \tag{4.8.6}$$

Empleando estas dos definiciones el segundo principio de la termodinámica se pueda expresar como:

$$\Gamma(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} \gamma(\mathbf{x}, t) \, dv \geq 0 , \tag{4.8.7}$$

siendo  $\gamma = \gamma_{loc} + \gamma_{con}$  la producción específica de entropía. Como la expresión (4.8.7) es válida para cualquier región material  $\mathcal{P}_t$ , su integrando ha de ser no negativo. Por lo tanto, la expresión diferencial euleriana de la desigualdad de Clausius-Duhem obtenida es:

$$\gamma(\mathbf{x}, t) \geq 0 . \tag{4.8.8}$$

Existe una formulación alternativa del segundo principio de la termodinámica, conocida como la desigualdad de Clausius-Plank, que establece que tanto  $\gamma_{loc}$  como  $\gamma_{con}$  han de ser no negativas:

$$\gamma_{loc}(\mathbf{x}, t) \geq 0 , \quad \gamma_{con}(\mathbf{x}, t) \geq 0 . \tag{4.8.9}$$

Evidentemente, la desigualdad de Clausius-Plank implica la desigualdad de Clausius-Duhem.

Un corolario de la desigualdad de Clausius-Plank es el siguiente. Como la entropía específica producida por conducción ha de ser no negativa se tiene que

$$\gamma_{con} = -\frac{1}{\rho \theta^2} \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \theta \geq 0 . \tag{4.8.10}$$

Puesto que la densidad y la temperatura absoluta son cantidades estrictamente positivas de la anterior ecuación se deduce que

$$-\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \theta \geq 0 , \tag{4.8.11}$$

es decir, que el flujo de calor *siempre ha de ser en la dirección opuesta al gradiente de temperatura*. En particular, si se acepta la ley de Fourier que establece  $\mathbf{q} = -\kappa \text{grad } \theta$ , entonces se deduce que la conductividad  $\kappa$  ha de ser positiva.

## 9. Ejercicios propuestos

**4.1** Demuestra las siguientes identidades:

- 1)  $\dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{L}(\mathbf{X}, t)\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ , siendo  $\mathbf{L} = \text{grad } \mathbf{v} \circ \varphi$ .
- 2)  $\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{X}, t)(\text{div } \mathbf{v} \circ \varphi)(\mathbf{X}, t)$ .

**4.2**

- 1) Demostrar que el campo de velocidades  $\mathbf{v} = A\mathbf{x}/|\mathbf{x}|^3$ , siendo  $A$  una constante arbitraria, satisface la ecuación de continuidad de un flujo incompresible.
- 2) En un determinado punto de un cuerpo los tensores de velocidad de deformación y tensión tienen, respectivamente, las componentes

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} [\text{s}^{-1}] \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 7 \\ -1 & 7 & 8 \end{pmatrix} [\text{N} \cdot \text{m}^{-2}].$$

Obtener el valor de la potencia tensional específica (por unidad de volumen) en ese punto.

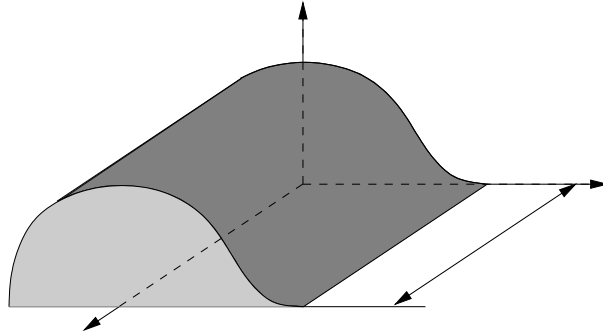
- 3) Un fluido perfecto está caracterizado por la ecuación constitutiva  $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1}$ , siendo  $p$  la presión. Demostrar que la potencia tensional específica puede expresarse como  $p\dot{\rho}/\rho$ , siendo  $\rho$  la densidad.

**4.3** Sea un fluido con el siguiente campo de velocidades:

$$v_x = 0, \quad v_y = 0, \quad v_z = f(x, y)z.$$

Se pide:

- 1) Determinar el valor de la densidad del fluido en todo instante sabiendo que en  $t = 0$ ,  $\rho = f(x, y)$ .
- 2) Supuesto  $f(x, y) = A$ , siendo  $A$  una constante, en el instante  $t = 1$  se vierte un colorante en los puntos de una superficie esférica de centro  $(0, 0, 0)^T$  y radio  $R$ . Obtener la ecuación de la mancha a lo largo del tiempo.
- 3) Bajo el mismo supuesto del apartado anterior,  $f(x, y) = A$ , calcular la cantidad de masa por unidad de tiempo que atraviesa la superficie cilíndrica de la figura 1, cuya directriz tiene longitud  $L$  y está contenida en el plano  $xy$ .



**4.4** (examen septiembre 2004)

- 1) Demostrar que un fluido cuyo campo de velocidad espacial es

$$\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{3x_2}{x_1^2 + x_2^2} \mathbf{e}_1 - \frac{3x_1}{x_1^2 + x_2^2} \mathbf{e}_2 \quad (4.9.1)$$

es incompresible.

- 2) Calcular la aceleración espacial correspondiente al campo de velocidades (4.9.1) y el flujo, en todo instante, que atraviesa una superficie esférica centrada en el origen y con radio unidad.
- 3) Se considera ahora un fluido *incompresible* con ecuación constitutiva

$$\boldsymbol{\sigma} = -\pi \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{d} . \quad (4.9.2)$$

En esta ecuación  $\pi$  es una función escalar y  $\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v})$ . A partir del teorema de las fuerzas vivas:

$$P_{ext} = \frac{d}{dt} K + \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \, dv ,$$

demostrar que si la potencia exterior aplicada  $P_{ext}$  es nula, el valor de la energía cinética  $K$  de este fluido no puede crecer en el tiempo.

**4.5** Demuestra que una deformación rígida

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{X} + \mathbf{c}(t) , \quad \mathbf{Q}(t)^T \mathbf{Q}(t) = \mathbf{1} ,$$

es siempre isocórica.

**4.6** (Examen parcial junio 2004)

Se considera el flujo bidimensional de un fluido cuyo campo de velocidad espacial es  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2$ . Se conoce la primera componente de dicha velocidad y su valor es

$$v_1 = -C \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} ,$$

siendo  $C$  una constante. Responder las siguientes cuestiones:

- 1) ¿Cuál es el valor de  $v_2$  si se sabe que el flujo es incompresible?

- 2) Calcular la aceleración espacial  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$  del fluido.
- 3) Demostrar que el flujo es irrotacional.
- 4) Se considera que el fluido en cuestión posee una ecuación constitutiva de forma que el tensor de Cauchy se puede expresar como  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{1}$ , siendo  $p$  un campo escalar de presiones y  $\mathbf{1}$  el tensor unidad de orden 2. Si las fuerzas que se aplican en el fluido por unidad de volumen se derivan de un potencial, es decir,  $\mathbf{b} = -\nabla\Pi(\mathbf{x}, t)$ , siendo  $\Pi$  un campo escalar, demostrar que la aceleración espacial también se deriva de un potencial de la forma

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = -\nabla\left(\frac{p + \Pi}{\rho}\right).$$



# Capítulo 5

## Modelos constitutivos

---

### 1. Introducción

La descripción cinemática de los medios continuos, explicada en el capítulo 3, y sus leyes de balance, descritas en el capítulo anterior, son válidas para todo cuerpo continuo. Más aún, las ecuaciones matemáticas correspondientes son idénticas en todos los casos: la ecuación de balance de cantidad de movimiento siempre es la misma, la definición del tensor de deformación de Green-Lagrange es común para todos los cuerpos, etc.

Sin embargo, la experiencia nos indica que los cuerpos responden de manera muy distinta ante los mismos estímulos. Por ejemplo, ante una fuerza puntual un bloque de acero y otro de madera se comportan de manera distinta, y distinta a su vez de un volumen idéntico de agua. Puesto que estas diferencias no aparecen ni en la descripción cinemática ni en las ecuaciones de balance deben de aparecer en algún otro lado. Este lugar son las llamadas “ecuaciones constitutivas”, que establecen una relación funcional entre la tensión aplicada y la deformación resultante, y que son el objeto del presente capítulo.

Si consideramos por un momento una deformación cualquiera de un sólido tridimensional el número de funciones que aparecen para la descripción de su cinemática y su comportamiento mecánico (ignoramos efectos térmicos) son quince. Tres son las componentes de la deformación, seis del tensor de deformaciones y seis del tensor de tensiones de Cauchy. La definición del tensor de deformación proporciona seis ecuaciones y la ley del balance de la cantidad de movimiento otras tres. En total tenemos quince funciones incógnita y nueve

ecuaciones que éstas deben de cumplir. Para que el sistema tenga solución hacen falta seis ecuaciones más, que son las que proporciona el modelo constitutivo. Con él, el número de incógnitas y el de ecuaciones es el mismo y así cabe la esperanza de que el problema mecánico tenga solución y de que la podamos encontrar.

El objetivo de este capítulo es describir, de forma general, las relaciones constitutivas de sólidos y fluidos. Como veremos más adelante, no todas las ecuaciones que relacionan deformación con tensión pueden ser una relación constitutiva, pues estas han de ser “razonables”. Qué se entiende por una relación “razonable” es un problema que aún no se ha resuelto completamente, sin embargo sí que se conoce alguna propiedad que debe de cumplirse y que explicaremos. De entre ellas la más importante es la objetividad material o principio de invariancia respecto a cambios de observador.

Hay que resaltar, por último, que los modelos constitutivos que presentamos en este capítulo, y más aún todos los que se emplean en este curso, son modelos de materiales idealizados. No existe ningún material perfectamente elástico o plástico. La validez de estos modelos es mayor tanto en cuanto los resultados que de ellos se deriven se ajusten al comportamiento real de los cuerpos que representan.

## 2. Principios generales de los modelos constitutivos

Como se indicaba en la introducción, no se puede definir cualquier relación funcional entre la tensión y la deformación y esperar que ésta represente una relación constitutiva válida. La determinación de las restricciones que debe de satisfacer una relación constitutiva es el mayor problema (no resuelto) de la mecánica de materiales (véase Truesdell-Noll)].

Aunque el problema no esté resuelto completamente se conocen algunos principios muy elementales que debe de satisfacer cualquier relación constitutiva. Estos son:

- El principio de determinismo.
- El principio de acción local.
- El principio de la memoria limitada.
- El principio de invariancia.

A continuación se explican los tres primeros y el último, por su importancia, se tratará en la sección siguiente.

### El principio de determinismo

Este principio establece que el estado de tensiones en un punto del cuerpo puede depender de la deformación actual y de las deformaciones pasadas, pero nunca de las deformaciones futuras.



### El principio de acción local

Este segundo principio postula que el estado de tensión en un punto de un medio continuo depende de la deformación en un entorno, tan pequeño como se quiera, de dicho punto. Es decir, que la historia de deformación en un puntos alejados no influye en el valor de la tensión.

Matemáticamente, este principio establece que la tensión en un punto del cuerpo sólo puede depender de (la historia) de la deformación y sus derivadas en ese mismo punto. En el caso particular en el que la tensión es únicamente función de la primera derivada, es decir, del gradiente de deformación  $\mathbf{F}$ , se dice que el material es “simple”. Si depende, en general, de las  $n$  primeras derivadas de la deformación se dice que es un material “de grado  $n$ ”.

### El principio de la memoria limitada

El siguiente principio refleja la experiencia cotidiana que nos indica que, aunque en teoría la tensión en un punto depende de toda la historia pasada de deformación, únicamente hace falta tener en cuenta la historia reciente. Más concretamente, este principio establece que el valor de la deformación en instantes muy remotos ha de tener menos influencia en la tensión actual que aquellos valores próximos en el tiempo.

## 3. El principio de invariancia

El principio de objetividad o de invariancia respecto a cambios de observador es uno de los principios más importantes de la Mecánica de Medios Continuos. Aunque a simple vista pueda parecer elemental no es así, y nos remitimos a Truesdell-Noll] para una descripción completa de su historia y de su contenido.

El principio en cuestión establece que las relaciones constitutivas deben de ser válidas para cualquier observador.

Consideremos un observador que estudia el movimiento y deformación de un cuerpo. Para este observador la deformación del cuerpo se describe con una función  $\varphi(\mathbf{X}, t)$ . La relación constitutiva establece que el tensor de tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$  que el observador puede medir verifica una ecuación de la forma:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t) = \mathcal{F}(\varphi(\mathbf{X}, t)) . \quad (5.3.1)$$

Siendo  $\mathcal{F}$  un funcional cuya expresión dejamos de momento sin especificar. Ahora consideramos un segundo observador que estudia también el movimiento y la deformación del mismo cuerpo. Aunque existen clases más generales de observadores, sólo vamos a considerar aquellos que preservan las distancias, ángulos e intervalos de tiempo. Es decir, aquellos para los cuales la deformación que hemos llamado  $\varphi$  se describe con una nueva función

$$\varphi^+(\mathbf{X}, t) = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t)\varphi(\mathbf{X}, t) , \quad (5.3.2)$$

siendo  $\mathbf{c}$  una función vectorial que depende únicamente del tiempo y  $\mathbf{Q}(t)$  una función tensorial que depende del tiempo y cuyo resultado es siempre un tensor ortogonal.

Para este segundo observador, la la tensión en el punto de observación ya no vale  $\boldsymbol{\sigma}$ , respectivamente, sino que toma un valor distintos que denominamos  $\boldsymbol{\sigma}^+$  y cuyo valor, calculado mediante un sencillo cambio de coordenadas, es igual a

$$\boldsymbol{\sigma}^+ = \mathbf{Q}(t)\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}(t)^T . \quad (5.3.3)$$

El principio de invariancia, enunciado anteriormente, establece que la relación funcional que existe entre la tensión y la deformación vistas por el observador móvil ha de ser exactamente (5.3.1), es decir,

$$\boldsymbol{\sigma}^+(\mathbf{X}, t) = \mathcal{F}(\boldsymbol{\varphi}^+(\mathbf{X}, t)) . \quad (5.3.4)$$

Hay que resaltar que la deformación que el cuerpo sufre es la misma siempre, sólo que los observadores, cuya posición relativa cambia con el tiempo, la perciben de manera distinta.

Empleando la expresión (5.3.3) en (5.3.4) concluimos que un modelo constitutivo  $\mathcal{F}(\cdot)$  es invariante u objetivo respecto a cambios de observador si verifica la igualdad:

$$\boxed{\mathbf{Q}(t)\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t)\mathbf{Q}(t)^T = \mathcal{F}(\mathbf{Q}(t)\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{c}(t))} \quad (5.3.5)$$

En el movimiento observado los gradientes de deformación que cada uno de los observadores calcula son, respectivamente:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \text{GRAD } \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) , \quad \mathbf{F}^+(\mathbf{X}, t) = \text{GRAD } \boldsymbol{\varphi}^+(\mathbf{X}, t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) . \quad (5.3.6)$$

Así pues, en el caso más sencillo de un modelo constitutivo de un material elástico simple, éste es invariante si cumple la relación

$$\mathbf{Q}(t)\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t)\mathbf{Q}(t)^T = \mathcal{F}(\mathbf{Q}(t)\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)) \quad (5.3.7)$$

Igual que hemos obtenido la regla de transformación del gradiente de deformaciones, se puede obtener también la transformación de cualquier otra medida cinemática. Por ejemplo, el tensor de Green-Lagrange que el observador móvil calcula resulta:

$$\mathbf{E}^+ = \frac{1}{2}((\mathbf{F}^+)^T \mathbf{F}^+ - \mathbf{1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{F} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) = \mathbf{E} , \quad (5.3.8)$$

es decir, que los dos observadores perciben el mismo tensor de Green-Lagrange. Por otro lado, si el primer observador describe el tensor de tensiones de Cauchy mediante un tensor  $\boldsymbol{\sigma}$ , éste se representará, según el segundo observador como  $\boldsymbol{\sigma}^+ = \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T$ . Examinemos ahora las consecuencias que el principio de invariancia tiene en algunos modelos constitutivos.

1. Considérese la ley constitutiva  $\mathcal{F}(\boldsymbol{\varphi}) = \mathbb{C} \text{GRAD } (\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t))$ , siendo  $\mathbb{C}$  un tensor constante de cuarto orden. Si el cuerpo se somete a una deformación  $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)$ , un primer observador calcularía el tensor de tensiones de Cauchy como:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t) = \mathbb{C} \text{GRAD } \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) = \mathbb{C} \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) . \quad (5.3.9)$$

Un segundo observador que se mueve de forma que describe la deformación del cuerpo según (5.3.2), percibe la tensión  $\boldsymbol{\sigma}^+ = \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T$  y el gradiente de deformaciones  $\mathbf{F}^+ = \mathbf{Q}\mathbf{F}$ .

Sin embargo, según la ley constitutiva planteada

$$\boldsymbol{\sigma}^+(\mathbf{X}, t) = \mathbb{C} \text{ GRAD } (\boldsymbol{\varphi}^+(\mathbf{X}, t) = \mathbb{C} \mathbf{F}^+(\mathbf{X}, t) = \mathbb{C} \mathbf{Q}(t) \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)) , \quad (5.3.10)$$

que no coincide con lo esperado. Se puede concluir que la ley constitutiva propuesta no verifica el principio de invariancia y por lo tanto no puede ser válida.

2. Se propone una segunda ley constitutiva de la forma:

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \mathbb{C} \mathbf{E}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)^T) , \quad (5.3.11)$$

siendo  $\mathbf{E}(\boldsymbol{\varphi})$  el tensor de Green-Lagrange asociado a la deformación  $\boldsymbol{\varphi}$ . Un primer observador calcula la tensión de Cauchy como

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F} \mathbb{C} \mathbf{E} \mathbf{F}^T . \quad (5.3.12)$$

Ahora bien, un segundo observador calcula el campo de tensiones también según (5.3.11) y obtiene

$$\boldsymbol{\sigma}^+ = \mathbf{F}^+ \mathbb{C} \mathbf{E}^+ (\mathbf{F}^+)^T = \mathbf{Q} \mathbf{F} \mathbb{C} \mathbf{E} \mathbf{F}^T \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{Q}^T , \quad (5.3.13)$$

por lo que cumple la condición de objetividad.

## 4. Modelos constitutivos reducidos

En esta sección estudiamos algunas formas más sencillas de formular modelos constitutivos para materiales simples que verifican siempre el principio de objetividad.

Recordamos que un material simple es aquel cuya ley constitutiva depende de la deformación solamente a través de su gradiente. La ley constitutiva más general de un material simple es pues

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t) = \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{F}^{(t)}(\mathbf{X})) , \quad (5.4.1)$$

siendo  $\mathbf{F}^{(t)}(\mathbf{X})$  la historia de gradientes de deformación en el punto  $\mathbf{X}$  hasta el instante de tiempo  $t$  y  $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\cdot)$  una función de argumento tensorial y de valor tensorial y simétrico.

El principio de objetividad establece que para un material simple

$$\mathbf{Q}^{(t)} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t) (\mathbf{Q}^{(t)})^T = \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{Q}^{(t)} \mathbf{F}^{(t)}(\mathbf{X})) . \quad (5.4.2)$$

Si en la relación anterior elegimos  $\mathbf{Q}^{(t)} = (\mathbf{R}^{(t)})^T$ , siendo  $\mathbf{R}^{(t)}$  la parte rotacional del gradiente de deformación, se obtiene

$$(\mathbf{R}^{(t)})^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t) \mathbf{R}^{(t)} = \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{U}^{(t)}(\mathbf{X})) , \quad (5.4.3)$$

donde  $\mathbf{U}^{(t)}(\mathbf{X})$  es el tensor derecho de alargamientos. De otra manera:

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{R}^{(t)} \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{U}^{(t)}(\mathbf{X})) (\mathbf{R}^{(t)})^T .} \quad (5.4.4)$$

En otras palabras, siempre que una ley constitutiva de un material simple sea de la forma (5.4.4), ésta verificará el principio de invariancia.

Es sencillo comprobar a partir de la última relación obtenida que existen expresiones alternativas que permiten formular leyes constitutivas invariantes tales como:

$$\sigma(\mathbf{X}, t) = \mathbf{R}^{(t)} \check{\sigma}(\mathbf{C}^{(t)}(\mathbf{X})) (\mathbf{R}^{(t)})^T = \mathbf{F}^{(t)} \tilde{\sigma}(\mathbf{C}^{(t)}(\mathbf{X})) (\mathbf{F}^{(t)})^T, \quad (5.4.5)$$

y muchas otras más, basadas en medidas de deformación diferentes.

## 5. Simetrías

Algunos materiales presentan simetrías en su respuesta, es decir, su relación tensión-deformación es idéntica en direcciones distintas. En particular, algunos materiales son isótropos, es decir que su respuesta es idéntica en todas las direcciones. En esta sección estudiamos las simetrías únicamente de materiales simples.

La definición formal de una simetría es la siguiente. Sea  $\mathcal{G}$  un subgrupo de  $O(3)$ . Es decir,  $\mathcal{G}$  es un conjunto de tensores ortogonales, no necesariamente propios, que incluye el tensor unidad y tales que sus posibles combinaciones y sus inversas también están incluidas. Se dice que  $\mathcal{G}$  es el grupo de simetría de un material en un punto  $\mathbf{X}$  del cuerpo si

$$\hat{\sigma}(\mathbf{F}(\mathbf{X})) = \hat{\sigma}(\mathbf{F}(\mathbf{X})\mathbf{R}), \quad (5.5.1)$$

para todo tensor ortogonal  $\mathbf{R} \in \mathcal{G}$ . En particular, si  $\mathcal{G} = O(3)$ , se dice que el material es isótropo.

La relación anterior indica que si un material tiene una cierta simetría en un punto, no se puede distinguir su respuesta constitutiva de la que tendría si localmente se hubiera “girado” mediante una transformación  $\mathbf{R}$ .

El principio de objetividad requiere además que, para todo tensor ortogonal  $\mathbf{Q}$ , se cumpla la relación

$$\hat{\sigma}(\mathbf{Q}\mathbf{F}) = \mathbf{Q}\hat{\sigma}(\mathbf{F})\mathbf{Q}^T. \quad (5.5.2)$$

Escogiendo en esta última expresión  $\mathbf{Q} = \mathbf{R} \in \mathcal{G}$  y empleando la definición de simetría (5.5.1), se obtiene esta relación para las leyes constitutivas:

$$\mathbf{R}\hat{\sigma}(\mathbf{F})\mathbf{R}^T = \hat{\sigma}(\mathbf{R}\mathbf{F}) = \hat{\sigma}(\mathbf{R}\mathbf{F}\mathbf{R}^T) \quad (5.5.3)$$

## 6. Clasificación de los modelos constitutivos

Intentamos ahora clasificar de forma muy genérica los diversos tipos de materiales atendiendo a las propiedades de sus leyes constitutivas correspondientes. Véase [Truesdell-Noll].

Distinguimos los siguientes tipos de materiales:

- **Fluidos:** Un material se dice que es fluido si su respuesta no varía después de una deformación cualquiera, siempre y cuando ésta última respete la densidad del mismo. Por ello, cualquier configuración de un fluido es una configuración indeformada.

- **Sólido:** Se dice que un material es sólido si posee una configuración especial, o de referencia, tal que cualquier deformación que no sea un movimiento de sólido rígido lleva al cuerpo a una nueva configuración en la cual su respuesta material es diferente. Además, los cuerpos sólidos pueden a su vez clasificarse en las siguientes categorías:
  - **Elástico:** Un material sólido es elástico si su respuesta no presenta histéresis y además independiente de la velocidad de aplicación de las cargas.
  - **Plástico:** Un material es de este tipo si presenta histéresis en los ciclos de carga, pero su respuesta es independiente de la velocidad de aplicación de las cargas.
  - **Viscoelástico:** Un material es viscoelástico si, a pesar de no mostrar histéresis, su deformación depende de la velocidad de aplicación de las cargas.
  - **Viscoplástico:** Finalmente, un material es de esta clase si su respuesta depende de la la velocidad de la carga y además posee histéresis.

En el resto del capítulo se presentan algunos de los aspectos más básicos de los modelos constitutivos para cuerpos sólidos elásticos, válidos para situaciones con deformaciones finitas. En capítulos posteriores se tratarán también los modelos constitutivos para fluidos y para sólidos con deformaciones infinitesimales.

## 7. Modelos constitutivos de sólidos elásticos

Dentro de la gran variedad de modelos constitutivos que existen, los sólidos elásticos son de los más sencillos. En esta sección se pretende describir algunas de sus propiedades más elementales pero sin recurrir a la hipótesis de deformaciones infinitesimales.

En primer lugar se dice que un sólido tiene un modelo constitutivo elástico no lineal cuando la tensión es únicamente función del gradiente de deformación  $\mathbf{F}$ , es decir, existe un funcional  $\widehat{\mathcal{F}}$  tal que

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t) = \widehat{\mathcal{F}}(\mathbf{X}, \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)) . \quad (5.7.1)$$

A partir de su definición vemos que un material elástico es simple y que la dependencia de la tensión respecto de la deformación es únicamente a través del gradiente de deformación, *en el instante en el que se evalúa*. El valor de la deformación en instantes anteriores no afecta a la tensión.

### Materiales elásticos isótropos

Dentro de los modelos constitutivos, los isótropos son los más sencillos y los más habitualmente empleados. Recordamos que un modelo constitutivo de la forma  $\boldsymbol{\sigma} = \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{F})$  es isótropo y cumple la condición de objetividad si

$$\mathbf{Q}\widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{F})\mathbf{Q}^T = \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{Q}^T) , \quad (5.7.2)$$

para todo tensor ortogonal  $\mathbf{Q}$ . Además, la expresión (5.4.4) propone un modelo reducido que verifica siempre la condición de objetividad. En el contexto de la elasticidad, esta expresión es sencillamente:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{R}(\mathbf{X}, t)\widehat{\boldsymbol{\sigma}}(U(\mathbf{X}, t))\mathbf{R}(\mathbf{X}, t)^T , \quad (5.7.3)$$

siendo  $\mathbf{R}$  la parte rotacional de  $\mathbf{F}$ . Combinando las ecuaciones (5.7.2) y (5.7.3) se demuestra que en un material elástico, isótropo, la tensión de Cauchy depende únicamente del tensor izquierdo de estiramientos, o del tensor izquierdo de Cauchy-Green:

$$\sigma(\mathbf{X}, t) = \hat{\sigma}(\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)) = \tilde{\sigma}(\mathbf{b}(\mathbf{X}, t)) . \quad (5.7.4)$$

Ignorando los argumentos  $(\mathbf{X}, t)$  por simplificar, este resultado se demuestra de la siguiente manera:

$$\sigma = \mathbf{R}\hat{\sigma}(\mathbf{U})\mathbf{R}^T = \hat{\sigma}(\mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T) = \hat{\sigma}(\mathbf{V}) = \tilde{\sigma}(\mathbf{b}) . \quad (5.7.5)$$

Este resultado tan útil permite obtener una representación aún más explícita de *todos* los modelos constitutivos isótropos, como se describe en el siguiente teorema.

**Teorema 7.1:** *La relación constitutiva de un material elástico es isótropa si y sólo si se puede expresar de la siguiente manera:*

$$\hat{\sigma}(\mathbf{b}) = \beta_0(I_{\mathbf{b}}, II_{\mathbf{b}}, III_{\mathbf{b}})\mathbf{1} + \beta_1(I_{\mathbf{b}}, II_{\mathbf{b}}, III_{\mathbf{b}})\mathbf{b} + \beta_2(I_{\mathbf{b}}, II_{\mathbf{b}}, III_{\mathbf{b}})\mathbf{b}^{-1} . \quad (5.7.6)$$

Los escalares  $I_{\mathbf{b}}, II_{\mathbf{b}}, III_{\mathbf{b}}$  son los tres invariantes del tensor  $\mathbf{b}$  y  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$  son funciones escalares.

DEMOSTRACIÓN: La demostración de este resultado no es sencilla y se puede encontrar, por ejemplo, en [Truesdell-Noll], [Gurtin]. ■

## Materiales hiperelásticos

Un tipo particular de modelos constitutivos elásticos son los llamados modelos hiperelásticos, también llamados modelos elásticos de Green. Estos modelos son aquellos en los que las tensiones se pueden obtener a partir de un potencial elástico.

La motivación para definir estos materiales reside en la definición de la potencia tensional, presentada en el capítulo sobre leyes de balance. Recordamos que la potencia tensional en una región material  $\mathcal{P}_t = \varphi_t(\mathcal{P}_o)$  se define de la siguiente manera:

$$P_{ten}(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} \sigma \cdot \mathbf{d} dv = \int_{\mathcal{P}_o} \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{F}} dV . \quad (5.7.7)$$

Los términos dentro de esta integral no son en general la derivada temporal de ninguna función. Sin embargo puede darse el caso de que exista un potencial  $W = W(\mathbf{F})$  tal que

$$\mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{F}} = \dot{W}(\mathbf{F}) , \quad (5.7.8)$$

de forma que la potencia tensional se pueda calcular como la derivada temporal de un potencial elástico:

$$P_{ten}(\mathcal{P}_t) = \frac{dU(\mathcal{P}_o)}{dt} , \quad U(\mathcal{P}_o) = \int_{\mathcal{P}_o} W(\mathbf{F}) dV . \quad (5.7.9)$$

Si esto es así, se dice que el material es hiperelástico y por lo tanto el tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff se puede calcular simplemente derivando el potencial de deformación  $W$ :

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial W(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t), \mathbf{X}}{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)} . \quad (5.7.10)$$

Un material hiperelástico es aquel que posee un potencial de deformación o de energía almacenada  $W$  tal que el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff se puede calcular con la expresión (5.7.10).

Del teorema de las fuerzas vivas y la definición (5.7.9) se deduce fácilmente que la potencia exterior suministrada a un cuerpo hiperelástico se transforma en variar su energía mecánica total:

$$E(\mathcal{P}_o) = \int_{\mathcal{P}_o} \rho_o |\mathbf{V}|^2 dV + \int_{\mathcal{P}_o} W(\mathbf{F}) dV = K(\mathcal{P}_o) + U(\mathcal{P}_o) . \quad (5.7.11)$$

La definición (5.7.10) de un material hiperelástico no tiene en cuenta la condición de objetividad del modelo constitutivo. Una forma alternativa de definir un material hiperelástico y que incluye de forma natural la objetividad es:

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}, t) = 2 \frac{\partial \bar{W}(\mathbf{C}(\mathbf{X}, t), \mathbf{X}}{\partial \mathbf{C}(\mathbf{X}, t)} . \quad (5.7.12)$$

Resulta inmediato que las dos definiciones son idénticas si  $\bar{W}(\mathbf{C}) = W(\mathbf{F})$ .

Los materiales hiperelásticos son los más empleados en mecánica no lineal de sólidos pues son los más sencillos. Entre todos ellos, los isótropos constituyen el tipo más común y se puede demostrar que en este caso el potencial de deformación únicamente puede depender de los invariantes principales  $I_{\mathbf{C}}, II_{\mathbf{C}}, III_{\mathbf{C}}$  o, equivalentemente, de los estiramientos principales  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Los modelos constitutivos más empleados se asocian a nombres propios y algunos de ellos son:

$$\begin{aligned} \text{Neo-Hookeano : } \quad & \bar{W} = \bar{W}(I_{\mathbf{C}}, III_{\mathbf{C}}) = U(III_{\mathbf{C}}) + \frac{\mu}{2}(I_{\mathbf{C}} - 3) , \\ \text{Mooney-Rivlin : } \quad & \bar{W} = \bar{W}(I_{\mathbf{C}}, II_{\mathbf{C}}, III_{\mathbf{C}}) = U(III_{\mathbf{C}}) + \frac{\mu}{2}(I_{\mathbf{C}} - 3) + \frac{\mu_2}{2(II_{\mathbf{C}} - 3)} , \\ \text{Ogden : } \quad & \bar{W} = \bar{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = U(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) + \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{i} (\lambda_1^i + \lambda_2^i + \lambda_3^i - 3) . \end{aligned}$$

Los modelos constitutivos hiperelásticos derivados de estos potenciales son isótropos, elásticos, e invariantes. Por ello, para encontrar un modelo constitutivo de un material elástico isótropo cualquiera basta con seleccionar un potencial elástico como los anteriores tal que, mediante una elección acertada de las constantes materiales, produzca una respuesta que se ajuste a lo que se obtiene experimentalmente. Veáanse los ejemplos del capítulo 7 en el libro de [Ogden-cm-1984].

Una vez definido un potencial de deformación, a partir de la expresión (5.7.12) se puede

calcular el tensor simétrico de Piola-Kirchhoff como:

$$\mathbf{S} = 2 \left[ \frac{\partial \bar{W}}{\partial I_{\mathbf{C}}} \frac{\partial I_{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial II_{\mathbf{C}}} \frac{\partial II_{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial III_{\mathbf{C}}} \frac{\partial III_{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} \right]. \quad (5.7.13)$$

Las derivadas parciales del potencial  $\bar{W}$  respecto a los invariantes de  $\mathbf{C}$  son sencillas en general. Recordamos las expresiones de las derivadas parciales de los invariantes principales respecto del tensor de deformación  $\mathbf{C}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} &= \mathbf{1}, \\ \frac{\partial II_{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} &= I_{\mathbf{C}} \mathbf{C} - \mathbf{C}^2, \\ \frac{\partial III_{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} &= III_{\mathbf{C}} \mathbf{C}^{-1}. \end{aligned} \quad (5.7.14)$$

**Ejercicio 7.2:** Demostrar, empleando las ecuaciones (5.7.13) y (5.7.14) que el tensor de tensiones de Cauchy de un material hiperelástico se puede expresar de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2J \frac{\partial \bar{W}}{\partial III_{\mathbf{b}}} \mathbf{1} + 2J^{-1} \left( \frac{\partial \bar{W}}{\partial I_{\mathbf{b}}} + I_{\mathbf{b}} \frac{\partial \bar{W}}{\partial II_{\mathbf{b}}} \right) \mathbf{b} - 2J^{-1} \frac{\partial \bar{W}}{\partial II_{\mathbf{b}}} \mathbf{b}^2. \quad (5.7.15)$$

□



# Capítulo 10

## Mecánica de fluidos

---

### 1. Introducción

En este capítulo estudiamos los medios continuos denominados “fluidos” y que caracterizamos en el capítulo 5 como aquellos que no poseen una configuración sin deformar.

No es el propósito de este capítulo presentar un resumen de un curso de Mecánica de Fluidos. El objetivo es aplicar los conceptos presentados durante todo el curso al estudio de este tipo de medios, y así apreciar la capacidad de la metodología desarrollada. Además, este enfoque permite abordar el análisis de los fluidos desde un punto de vista común al del resto de los cuerpos, lo cual favorece su comprensión.

A partir de la descripción cinemática ya estudiada y mediante la selección de modelos constitutivos adecuados se obtienen las ecuaciones de modelos de mecánica de fluidos de complejidad variable. Es posible, siempre dentro del mismo marco teórico, obtener las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de los fluidos ideales, de la hidrostática, las ecuaciones de Navier-Stokes, el origen de la turbulencia, etc. Sin embargo, por limitaciones de tiempo sólo se presentarán algunos de estos modelos.

La Mecánica de Fluidos es un campo donde la hipótesis de continuidad se verifica de forma muy precisa. A diferencia de los cuerpos sólidos, donde los defectos microestructurales son muy comunes y responsables en gran medida del comportamiento de dichos materiales, los fluidos son más homogéneos y los efectos de tamaño se pueden ignorar sin cometer grandes errores en un gran número de situaciones. Además los modelos constitutivos

más representativos, y que estudiaremos en este capítulo, también se ajustan muy bien al comportamiento de los fluidos reales. Por todo ello, la Mecánica de Medios Continuos sirve para formular modelos de Mecánica de Fluidos cuyos resultados se ajustan mucho a la realidad.

En este capítulo se ignoran todos los efectos térmicos que puedan aparecer en las relaciones constitutivas de las variables que se tratan. Esta simplificación, aunque limita la aplicabilidad de los resultados, resulta suficiente para una primera presentación de la teoría de los medios fluidos.

## 2. Cinemática

En el capítulo 2 se estudió en detalle la cinemática de medios continuos y todo lo contenido en dicho capítulo aplica a las deformaciones características de los cuerpos fluidos. En esta sección complementamos los conceptos presentados anteriormente y definimos algunos conceptos que no han tenido utilidad hasta ahora en la asignatura.

### Velocidad y aceleración

En primer lugar, repasamos el concepto de *velocidad y aceleración* espaciales. El primero de ellos es la expresión euleriana de la velocidad material, es decir:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \left( \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} \circ \boldsymbol{\varphi}^{-1} \right)(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{V} \circ \boldsymbol{\varphi}^{-1})(\mathbf{x}, t) . \quad (10.2.1)$$

De la misma manera, la aceleración espacial es la expresión euleriana de la aceleración material:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \left( \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial t^2} \circ \boldsymbol{\varphi}^{-1} \right)(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{A} \circ \boldsymbol{\varphi}^{-1})(\mathbf{x}, t) . \quad (10.2.2)$$

La velocidad y aceleración espacial están relacionadas por la siguiente expresión:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) = \frac{D\mathbf{v}}{Dt}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \text{grad } \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) . \quad (10.2.3)$$

La primera parte se conoce con el nombre de derivada local y la segunda como la derivada convectiva.

### Líneas de corriente y trayectorias

Si se conoce el campo de velocidades espaciales  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  en un instante  $t^*$ , se puede definir una *línea de corriente* como una curva integral de dicho campo vectorial, es decir, una curva  $\mathbf{x} = \mathbf{c}(\alpha)$  en función de un escalar  $\alpha$  tal que su vector tangente en cualquiera de sus puntos coincide con el vector velocidad. Matemáticamente,

$$\mathbf{c}'(\alpha) = \mathbf{v}(\mathbf{c}(\alpha), t^*) . \quad (10.2.4)$$

De entre las infinitas líneas de corriente que existen en un fluido en el instante  $t^*$ , la que pasa por el punto  $\mathbf{x}_o$  es la solución a la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}'(\alpha) &= \mathbf{v}(\mathbf{c}(\alpha), t^*) , \\ \mathbf{c}(0) &= \mathbf{x}_o . \end{aligned} \tag{10.2.5}$$

Obsérvese que las líneas de corriente están definidas para un instante de tiempo  $t^*$  y que su forma depende únicamente del campo de velocidad espacial en dicho instante. Es posible, por tanto, que un instante después o antes de  $t^*$  las líneas de corriente cambien. Si se toma una curva cerrada que no sea una curva de corriente, las curvas de corriente que pasan por cada uno de los puntos de la primera curva forman una superficie llamada *tubo de corriente*. Puesto que las líneas de corriente pueden cambiar con el tiempo, los tubos de corriente también.

Un concepto relacionado con el de línea de corriente es el de *trayectoria*, que ya apareció en el capítulo 2. Dado un punto  $\mathbf{x}_o$  del espacio, su trayectoria es la unión de las sucesivas posiciones que ese punto recorre en el tiempo. La descripción material de esta curva  $\boldsymbol{\tau}(t)$  es muy sencilla pues, a partir de la definición de la deformación  $\boldsymbol{\varphi}$ , se tiene que

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_o, t) . \tag{10.2.6}$$

En Mecánica de fluidos se emplea frecuentemente la descripción espacial y ésta requiere, para encontrar la expresión de la trayectoria resolver una ecuación diferencial similar a (10.2.5):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}'(t) &= \mathbf{v}(\boldsymbol{\tau}(t), t) , \\ \boldsymbol{\tau}(0) &= \mathbf{x}_o . \end{aligned} \tag{10.2.7}$$

En general, la línea de corriente que pasa por un punto en un instante es distinta de la trayectoria de la partícula que se encuentra en dicho momento en ese preciso lugar. Sin embargo, si el movimiento es *estacionario*, es decir,

$$\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0 , \tag{10.2.8}$$

entonces ambas curvas coinciden pues son la solución a la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}'(t) &= \mathbf{v}(\boldsymbol{\tau}(t)) , \\ \boldsymbol{\tau}(0) &= \mathbf{x}_o . \end{aligned} \tag{10.2.9}$$

## Vorticidad

También recordamos del capítulo 2 que la parte hemisimétrica del gradiente espacial de velocidades es el llamado *tensor de spin*  $\mathbf{w}$ . El doble del vector axial de este tensor hemisimétrico es el vector de *vorticidad*  $\boldsymbol{\xi}$ , que se puede expresar alternativamente como:

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t) = \text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) , \tag{10.2.10}$$

y que posee múltiples aplicaciones en Mecánica de Fluidos. Este campo vectorial expresa la rotación diferencial que se produce debido a la deformación. Por lo tanto, se dice que una

deformación o un flujo es *irrotacional* si el vector de vorticidad se anula en todo punto. Este campo vectorial sirve también para definir una cantidad escalar llamada *circulación*. Sea  $\mathcal{C}$  una curva cerrada con diferencial de arco  $d\mathbf{x}$ . La circulación en esta curva se define como la integral

$$\Gamma_{\mathcal{C}} = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} \quad (10.2.11)$$

Si esta curva es el contorno de una superficie  $\Sigma$  de normal  $\mathbf{n}$ , por el teorema de Stokes, se tiene que

$$\Gamma_{\mathcal{C}} = \int_{\Sigma} \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_{\Sigma} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n} \, da . \quad (10.2.12)$$

Una curva tangente en todos sus puntos al campo de vorticidad se denomina *línea de vorticidad* y todas las líneas de vorticidad que pasan por los puntos de una curva cerrada forman un *tubo de vorticidad*. Es inmediato comprobar que la circulación de dos secciones de un tubo de vorticidad ha de ser la misma

**Teorema 2.1:** (*Kelvin*) Sea  $\mathcal{C}$  una curva material. El cambio de circulación  $\Gamma_{\mathcal{C}}$  en el tiempo se puede calcular como:

$$\frac{d\Gamma_{\mathcal{C}}}{dt} = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{x} . \quad (10.2.13)$$

DEMOSTRACIÓN: La demostración emplea la definición de curva material  $\mathcal{C} = \boldsymbol{\varphi}(\mathcal{C}_o)$  y la de derivada de una integral sobre una curva material, presentada en el capítulo 5:

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_{\mathcal{C}}}{dt} &= \frac{d}{dt} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} \\ &= \frac{d}{dt} \oint_{\mathcal{C}_o} \mathbf{V} \cdot \mathbf{F} \, d\mathbf{X} \\ &= \oint_{\mathcal{C}_o} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{F} \, d\mathbf{X} + \mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{F}} \, d\mathbf{X}) \\ &= \oint_{\mathcal{C}_o} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{F} \, d\mathbf{X} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{L}\mathbf{F} \, d\mathbf{X}) \\ &= \oint_{\mathcal{C}} (\mathbf{a} \cdot d\mathbf{x} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{L} \, d\mathbf{x}) , \end{aligned} \quad (10.2.14)$$

pero la integral del último sumando se anula pues

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{L} \, d\mathbf{x} = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot \text{grad } \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \oint_{\mathcal{C}} d[\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}] = 0 \quad (10.2.15)$$

al ser la curva  $\mathcal{C}$  cerrada. ■

### 3. Resumen de las ecuaciones de la Mecánica de Fluidos

Ya se describió en capítulo 4 cómo cualquier medio continuo está gobernado por una serie de principios fundamentales, o leyes de balance, que se pueden expresar en su forma lagrangiana o euleriana. En los problemas que se estudian comúnmente en Mecánica de Fluidos se consideran volúmenes de control y se busca conocer el valor de los campos incógnita (velocidad, presión, densidad, etc) como expresiones dependientes de los puntos del espacio. Por ello suele ser más apropiado elegir una descripción euleriana de las leyes de balance para la resolución de problemas de fluidos. Existen excepciones a lo anteriormente expuesto, como por ejemplo el estudio del movimiento de un fluido en el recipiente que lo contiene. Sin embargo, dado que la gran mayoría de la aplicaciones se benefician de una descripción euleriana, recogemos en la siguiente tabla las leyes de balance principales en este formalismo:

<ul style="list-style-type: none"> <li>• Balance de cantidad de movimiento:</li> </ul> $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) . \quad (10.3.1)$
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Balance de momento cinético:</li> </ul> $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t))^T . \quad (10.3.2)$
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Balance de masa (ecuación de continuidad):</li> </ul> $\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = 0 . \quad (10.3.3)$
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Balance de energía (primer principio de la termodinámica)</li> </ul> $\rho(\mathbf{x}, t)\dot{u}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t)r(\mathbf{x}, t) - \operatorname{div} \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) . \quad (10.3.4)$

**Caja 10.3.1:** Resumen de las principales leyes de balance. Formulación euleriana

Como también se ha explicado anteriormente en el capítulo 5, el sistema de ecuaciones que acabamos de presentar no está completo, pues falta por añadir la relación constitutiva. En la próximas secciones describiremos los modelos constitutivos más importantes de los medios fluidos y algunas de las propiedades de los flujos resultantes.

### 4. Fluidos perfectos

El primer tipo de fluido que se estudia el llamado *fluido perfecto*. Esta clase de fluidos se distingue porque el tensor de tensiones es esférico en todo punto y de la forma:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{1} . \quad (10.4.1)$$

El escalar  $p$  se denomina *presión*. Algunos autores requieren además que el fluido sea incompresible. Sin embargo en este curso no lo requeriremos.

A partir de la condición (10.4.1) se puede comprobar que un fluido de este tipo no puede soportar, ni transmitir, esfuerzos tangenciales (de cortante). La fuerza por unidad de superficie que soportan estos fluidos en un punto  $\mathbf{x}$  y sobre una superficie de normal  $\mathbf{n}$ :

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}(\mathbf{x}) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{n} , \quad (10.4.2)$$

que obviamente sólo tiene componente normal. Por ello, y como demostraremos rigurosamente más adelante, un fluido perfecto sin rotación no puede agitarse de forma que la desarrolle. De la misma manera, un fluido perfecto que tenga rotación no podrá detenerse.

Los fluidos que aparecen en la naturaleza no son nunca perfectos, puesto que siempre ejercen al menos una pequeña resistencia a la cizalladura. Sin embargo la aproximación (10.4.1) es suficientemente buena para la resolución de un gran número de situaciones de interés ingenieril. Es muy común en ingeniería, suponer que el agua y el aire se comportan como fluidos perfectos. Además hay que tener en cuenta que un mismo fluido se puede comportar como perfecto o no dependiendo del problema que se estudie.

### Las ecuaciones de Euler para fluidos perfectos incompresibles

Consideramos ahora fluidos perfectos que además son incompresibles. La incompresibilidad, como se estudió en el capítulo 5, se puede expresar de numerosas maneras, de las cuales emplearemos dos que son, por supuesto, equivalentes:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0 , \quad \dot{\rho}(\mathbf{x}, t) = 0 . \quad (10.4.3)$$

Sustituyendo la expresión de la tensión característica de los fluidos perfectos (10.4.1) en la ecuación de balance de cantidad de movimiento (10.3.1) se obtiene, junto con la condición de incompresibilidad, las ecuaciones de Euler:

$$\begin{aligned} -\operatorname{grad} p + \rho \mathbf{b} &= \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} \mathbf{v} \mathbf{v} \right) , \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 . \end{aligned} \quad (10.4.4)$$

### El teorema de Bernoulli en fluidos perfectos

Consideramos ahora un fluido ideal, incompresible y homogéneo con fuerzas volumétrica aplicadas que derivan de un potencial  $\beta$ :

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = -\operatorname{grad} \beta(\mathbf{x}, t) \quad (10.4.5)$$

Entonces, de la ecuación de Euler (10.4.4), se puede deducir que la aceleración espacial  $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$  deriva a su vez de otro potencial escalar:

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - \operatorname{grad} \beta = -\operatorname{grad} \left( \frac{p}{\rho} + \beta \right) . \quad (10.4.6)$$

A partir de la siguiente identidad vectorial

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad}(|\mathbf{v}|^2) + \boldsymbol{\xi} \wedge \mathbf{v} , \quad (10.4.7)$$

siendo  $\boldsymbol{\xi}$  la vorticidad del flujo, y combinando las ecuaciones (10.4.6) y (10.4.7), se obtiene la siguiente formulación de las ecuaciones de Euler:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad}(|\mathbf{v}|^2) + \boldsymbol{\xi} \wedge \mathbf{v} = -\text{grad}\left(\frac{p}{\rho} + \beta\right) , \quad (10.4.8)$$

Consideremos ahora un flujo en régimen estacionario. En estas condiciones, el término  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$  se anula. Además, como vimos en la ‘sec-cinematica’, las trayectorias coinciden con las líneas de corriente, que son a su vez tangentes al campo de velocidades. Una línea de corriente es una curva  $\mathbf{x} = \mathbf{c}(\alpha)$  con vector tangente

$$\boldsymbol{\tau}(\alpha) = \mathbf{c}'(\alpha) , \quad (10.4.9)$$

paralelo a  $\mathbf{v}(\mathbf{c}(\alpha))$ . Empleando la ecuación (10.4.8) podemos afirmar que en todo punto de una línea de corriente:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{1}{2} \text{grad}(|\mathbf{v}|^2) + \boldsymbol{\xi} \wedge \mathbf{v} + \text{grad}\left(\frac{p}{\rho} + \beta\right)\right) \cdot \boldsymbol{\tau} \\ &= \left(\frac{1}{2} \text{grad}(|\mathbf{v}|^2) + \text{grad}\left(\frac{p}{\rho} + \beta\right)\right) \cdot \boldsymbol{\tau} \\ &= \text{grad}\left(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + \frac{p}{\rho} + \beta\right) \cdot \boldsymbol{\tau} . \end{aligned} \quad (10.4.10)$$

Definimos la cantidad escalar

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}|\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 + \frac{p(\mathbf{x})}{\rho} + \beta(\mathbf{x}) . \quad (10.4.11)$$

Y con ella reescribimos la identidad (10.4.10) de la siguiente manera:

$$0 = \text{grad} G(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) , \quad \text{siendo } \mathbf{x} = \mathbf{c}(\alpha) , \quad (10.4.12)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\frac{d(G \circ \mathbf{c})(\alpha)}{d\alpha} = 0 . \quad (10.4.13)$$

Esta última expresión expresa que la cantidad  $G$  definida en (10.4.11) es constante a lo largo de los puntos que forman una línea de corriente, y es conocida como el teorema de Bernoulli.

Una situación muy habitual en ingeniería es aquella en la que las fuerzas másicas derivan de un potencial gravitatorio,  $\beta(\mathbf{x}) = gx_3$ , siendo  $g$  la aceleración de la gravedad y  $x_3$  la dirección vertical con sentido hacia arriba. En este caso la cantidad  $G$  definida en la

ecuación (10.4.11) toma el valor

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}|\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 + \frac{p(\mathbf{x})}{\rho} + gx_3 . \quad (10.4.14)$$

En hidráulica se define más usualmente la siguiente cantidad, que simplemente cambia de escala la función  $G$ ,

$$H(\mathbf{x}) = \frac{|\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2}{2g} + \frac{p(\mathbf{x})}{\rho g} + x_3 . \quad (10.4.15)$$

Con estas definiciones, el teorema de Bernoulli se puede enunciar de la siguiente manera: *en un fluido perfecto, homogéneo e incompresible, sometido a cargas gravitatorias, la suma de la altura geométrica  $x_3$ , la altura piezométrica  $\frac{p(\mathbf{x})}{\rho g}$  y cinética  $\frac{|\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2}{2g}$  es una constante a lo largo de todas las líneas de corriente, si el flujo se encuentra en estado estacionario.*

### Aspectos termodinámicos

En un fluido perfecto incompresible la potencia tensional que se desarrolla es siempre nula pues, para toda región material  $\mathcal{R}_t$ ,

$$P_{ten}(\mathcal{R}_t) = \int_{\mathcal{R}_t} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} dv = \int_{\mathcal{R}_t} -p\mathbf{1} \cdot \mathbf{d} dv = \int_{\mathcal{R}_t} -p \operatorname{div} \mathbf{v} dv = 0 . \quad (10.4.16)$$

Utilizando este resultado se sigue que si sobre una región material no se aplica ninguna potencia externa, su energía se conserva.

### Fluidos barotrópicos

Un tipo de fluido perfecto es el denominado *barotrópico*. Este tipo de fluidos se caracterizan porque la presión depende únicamente de la densidad y se puede escribir

$$p(\mathbf{x}, t) = \pi(\rho(\mathbf{x}, t)) , \quad (10.4.17)$$

siendo  $\pi$  una función escalar monótona creciente. Gran parte de los desarrollos planteados para fluidos perfectos incompresibles se pueden repetir para fluidos barotrópicos. En concreto, se puede encontrar una ecuación de Euler para este tipo de fluidos y una expresión del teorema de Bernoulli. La primera se puede establecer de forma inmediata y resulta:

$$\begin{aligned} -\pi' \operatorname{grad} \rho + \rho \mathbf{b} &= \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} \mathbf{v} \mathbf{v} \right) , \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0 . \end{aligned} \quad (10.4.18)$$

El teorema de Bernoulli para este tipo de fluidos se demuestra de manera similar al enunciado anteriormente y únicamente es necesario modificar la expresión de la función  $G$  que se



mantiene constante a lo largo de las líneas de corriente en un flujo estacionario. En el caso de los fluidos barotrópicos esta función queda definida de la siguiente manera

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}|\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 + \gamma(\rho(\mathbf{x})) + gx_3 . \quad (10.4.19)$$

La función escalar  $\gamma$  está definida por la expresión:

$$\gamma(\rho) = \int_a^\rho \frac{\pi'(\eta)}{\eta} d\eta , \quad (10.4.20)$$

siendo  $a$  una constante positiva pero arbitraria.

## 5. Fluidos newtonianos

Como se ha explicado ya, en la naturaleza los fluidos siempre oponen alguna resistencia a la deformación por cortante, y esto no puede explicarse mediante los modelos de fluidos perfectos. En esta sección se presentan los modelos constitutivos más sencillos y útiles de cuantos se pueden formular para representar efectos viscosos.

Estos modelos de material, llamados fluidos newtonianos, se definen mediante relaciones constitutivas de la forma

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{1} + \mathbb{C}(\mathbf{x}, t)\mathbf{d}(\mathbf{x}, t) , \quad (10.5.1)$$

siendo  $\mathbb{C}$  un tensor de cuarto orden que depende del material y  $\mathbf{d} = \text{sim}[\text{grad } \mathbf{v}]$ , la tasa de deformación. Este último tensor proporciona una cierta medida del movimiento relativo de las partículas en el fluido. Si consideramos a partir de ahora únicamente fluidos isótropos y homogéneos, la forma del tensor constitutivo  $\mathbb{C}$  se simplifica, y se puede demostrar que éste sólo puede ser de la forma;

$$\mathbb{C} = \lambda\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu\mathbb{I} . \quad (10.5.2)$$

Los escalares  $\lambda, \mu$  son viscosidades características del fluido que pueden, en general, depender de la temperatura y de la deformación. Sin embargo, en nuestro tratamiento serán considerados simplemente constantes del material.

En este punto debe de hacerse una aclaración respecto del concepto de *presión*. En la relación constitutiva (10.5.1), el campo escalar  $p$  se denomina *presión hidrostática* pues corresponde a la única presión que existiría en condiciones estáticas, es decir  $\mathbf{d} = 0$ . Sin embargo, en condiciones dinámicas generales, puede existir cierta confusión entre lo que es la presión y la media de los valores del tensor esférico de tensión pues tanto la parte debida a la presión hidrostática como la debida a la viscosidad pueden tener componente esférica. Por ello se define la presión media como

$$p_{med} = -\frac{1}{3}\text{traza}[\boldsymbol{\sigma}] = p - \frac{1}{3}\text{traza}[\mathbb{C}\mathbf{d}] . \quad (10.5.3)$$

Esta presión media coincide, por lo anteriormente expuesto, con la presión hidrostática en condiciones de reposo del fluido.

Para un fluido newtoniano isótropo podemos expresar la ley constitutiva (10.5.1) también de la forma:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma} &= -p\mathbf{1} + \lambda(\text{traza}[\mathbf{d}])\mathbf{1} + 2\mu\left(\frac{1}{3}(\text{traza}[\mathbf{d}])\mathbf{1} + \text{desv}[\mathbf{d}]\right) \\
 &= -p\mathbf{1} + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\text{traza}[\mathbf{d}]\mathbf{1} + 2\mu\text{desv}[\mathbf{d}] \\
 &= -p\mathbf{1} + \left(\lambda + \frac{2}{3}\text{div } \mathbf{v}\right)\mathbf{1} + 2\mu\text{desv}[\mathbf{d}] .
 \end{aligned} \tag{10.5.4}$$

En la última igualdad hemos empleado la relación  $\text{traza}[\mathbf{d}] = \text{div } \mathbf{v}$ , cuya demostración es trivial. La constante  $\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu$  es la llamada viscosidad volumétrica, puesto que es la que afecta a la parte esférica del tensor tasa de deformación. Empleando este concepto, podemos escribir una ley constitutiva para la parte esférica de la tensión y otra para su parte desviadora:

$$\begin{aligned}
 \text{desv}[\boldsymbol{\sigma}] &= 2\mu \text{desv}[\mathbf{d}] , \\
 p_{med} &= p - \kappa \text{div } \mathbf{v} .
 \end{aligned} \tag{10.5.5}$$

### Las ecuaciones de Navier-Stokes

A continuación estudiamos la forma de la ecuación del balance de cantidad de movimiento en el caso de un fluido newtoniano. Esta ecuación se conoce con el nombre de Navier-Stokes y es la más empleada para simular flujos en fluidos reales. Ahora bien, su resolución debe de realizarse empleando métodos numéricos pues, como se verá ahora, su tratamiento analítico no es sencillo.

Para formular las ecuaciones de Navier-Stokes basta con desarrollar el término de la divergencia del tensor de tensiones, teniendo en cuenta la ecuación constitutiva (10.5.4). Se comprueba el siguiente resultado:

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} = \text{div} [-p\mathbf{1} + \lambda \text{div } \mathbf{v}\mathbf{1} + 2\mu \mathbf{d}] = -\text{grad } p + (\lambda + \mu)\text{grad div } \mathbf{v} + \mu\Delta \mathbf{u} . \tag{10.5.6}$$

Sustituyendo esta expresión para la divergencia del tensor de tensiones se obtiene la ecuación de Navier-Stokes:

$$\boxed{-\text{grad } p + (\lambda + \mu)\text{grad div } \mathbf{v} + \mu\Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad } \mathbf{v} \mathbf{v} \right) .} \tag{10.5.7}$$

En el caso de que el flujo sea incompresible, las ecuaciones de Navier-Stokes se simplifican:

$$\boxed{\begin{aligned} -\text{grad } p + \mu\Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} &= \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad } \mathbf{v} \mathbf{v} \right) , \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0 . \end{aligned}} \tag{10.5.8}$$

### Aspectos termodinámicos

La presencia de viscosidad en los fluidos tiene el efecto de que la energía se disipa por su causa. A diferencia de los fluidos perfectos incompresibles, donde la energía cinética se conserva en ausencia de fuerzas exteriores a continuación demostramos que la energía cinética en los fluidos newtonianos incompresibles puede decrecer debido a la viscosidad. En la práctica esto conlleva a que un fluido viscoso contenido en un recipiente y con un campo de velocidades no nulo irá “parándose” debido a la disipación.

Para ello recordemos que el primer principio de la termodinámica establece el siguiente balance energético sobre una región material  $\mathcal{R}_t$ :

$$P_{ext}(\mathcal{R}_t) = \dot{K}(\mathcal{R}_t) + P_{ten}(\mathcal{R}_t) . \quad (10.5.9)$$

Si la potencia exterior aplicada sobre una región material es nula entonces la variación de energía cinética se puede obtener de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{K}(\mathcal{R}_t) &= P_{ten}(\mathcal{R}_t) , \\ &= - \int_{\mathcal{R}_t} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} \, dv \\ &= - \int_{\mathcal{R}_t} (-p\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{d}) \cdot \mathbf{d} \, dv \\ &= - \int_{\mathcal{R}_t} (-p\operatorname{div} \mathbf{v} + 2\mu\|\mathbf{d}\|^2) \, dv \\ &= -2 \int_{\mathcal{R}_t} \mu\|\mathbf{d}\|^2 \, dv \end{aligned} \quad (10.5.10)$$

La cantidad obtenida nunca es positiva y de hecho es negativa siempre que haya algo de fricción entre las partículas del fluido o con el contorno.

### El número de Reynolds y el flujo de Stokes

Una técnica muy empleada en las ciencias, y en particular en el diseño de experimentos, es la búsqueda de cantidades adimensionales que reflejen, de alguna manera, la magnitud de los principales efectos que se quieren medir en un experimento, y sus relaciones entre ellos. Por ejemplo, preguntas como: “en un flujo dentro de una tubería, si el fluido tiene una viscosidad de 0,3 Pa·s, ¿se pueden despreciar los efectos viscosos?”, no tienen sentido.

Existen multitud de números adimensionales, normalmente asociados a nombres de investigadores de su campo correspondiente. En mecánica de fluidos uno de los más importantes es el número de Reynolds, que describimos a continuación. Consideremos el flujo de un fluido. Sea  $V$  la magnitud de una velocidad característica del problema, y  $L$  una longitud también característica. El número de Reynolds se define como:

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu} . \quad (10.5.11)$$

Un número de Reynolds alto indica que el flujo que se estudia los efectos inerciales son importantes comparados con los efectos viscosos, y viceversa. Para que en la resolución

matemática de un problema sea razonable ignorar los efectos viscosos (es decir, emplear un modelo con un fluido perfecto) es una condición necesaria que el número de Reynolds sea muy grande.

En el caso opuesto, cuando el número de Reynolds es muy pequeño, los efectos viscosos son mucho más importantes que los efectos inerciales (no se puede decir simplemente que la viscosidad es mucho mayor que la densidad) y éstos últimos se pueden ignorar. Cuando los efectos inerciales se desprecian en la ecuación (10.5.8) de Navier-Stokes de un fluido incompresible obtenemos las ecuaciones del flujo de Stokes:

$$\begin{aligned} -\text{grad } p + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} &= 0, \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \tag{10.5.12}$$

Estas ecuaciones se usan como modelo matemático para flujos lentos de fluidos viscosos.

## 6. Fluidos no newtonianos

El comportamiento de algunos fluidos no queda bien reflejado por las soluciones que se obtienen de las ecuaciones de Navier-Stokes. Estos incluyen fluidos con polímeros o sedimentos en suspensión, la sangre y otros. Por ejemplo, se ha observado que ocasionalmente que los coeficientes de viscosidad dependen de la tasa de deformación y en otras ocasiones que la respuesta del fluido tiene “memoria”, es decir, que depende no sólo de la deformación en ese instante sino también de las deformaciones pasadas.

Los modelos de fluidos no newtonianos pueden ser complejos y no es el objetivo entrar en una descripción detallada de los mismos. Concluimos esta sección simplemente enunciando un modelo constitutivo de este tipo, el fluido Fluido de Reiner-Rivlin, cuya expresión es:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + \alpha_0 \mathbf{d} + \alpha_1 \mathbf{d}^2, \tag{10.6.1}$$

siendo  $\alpha_0, \alpha_1$  dos funciones escalares de los invariantes de la tasa de deformación.

## 7. Hidrostática

En esta última sección del capítulo presentamos las ecuaciones de la hidrostática de fluidos y desarrollamos algunos resultados de interés. Antes de continuar, merece la pena indicar que en condiciones estáticas la tasa de deformación se anula y por tanto los fluidos perfectos, newtonianos y los no newtonianos se comportan de la misma manera. En todos estos casos, el tensor de tensiones es:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = -p(\mathbf{x})\mathbf{1}. \tag{10.7.1}$$

Esta simple propiedad permite demostrar el *principio de Pascal*, que afirma que en un fluido en condiciones de reposo la magnitud de la fuerza normal a una superficie es independiente de la orientación de la misma. Para demostrar esta propiedad basta con calcular el módulo

de la fuerza normal sobre una superficie con vector normal  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ :

$$f_n = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = -p(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = -p(\mathbf{x}) . \quad (10.7.2)$$

En segundo lugar, en condiciones de reposo, la aceleración espacial en el fluido también se anula. Por esta razón, y utilizando la ecuación (10.7.1), la ecuación de equilibrio estático para todo tipo de fluidos es sencillamente

$$\boxed{-\text{grad } p + \rho\mathbf{b} = 0 .} \quad (10.7.3)$$

### Presión hidrostática debida a la gravedad

Una aplicación de la hidrostática muy común es considerar la presión en el interior de un fluido debida a la fuerza de la gravedad. Si se considera un sistema de coordenadas cartesiano donde  $x_3$  es la dirección vertical con sentido hacia arriba entonces las fuerzas másicas son  $\mathbf{b} = -g\mathbf{e}_3$  y la ecuación de equilibrio (10.7.3) es:

$$\text{grad } p(\mathbf{x}) - g\mathbf{e}_3 . \quad (10.7.4)$$

Suponiendo un valor de referencia  $p = 0$  cuando  $x_3 = 0$ , entonces la ecuación en diferencias parciales (10.7.4) se puede resolver exactamente y su solución es:

$$p(\mathbf{x}) = -gx_3 . \quad (10.7.5)$$

### El principio de Arquímedes

El principio de Arquímedes afirma que todo cuerpo sumergido en un fluido en reposo experimenta un empuje vertical y hacia arriba igual al peso del volumen desalojado.

Para demostrar este principio supongamos, como en el caso anterior, un sistema de coordenadas cartesiano con el origen en la superficie libre del fluido y con el eje  $x_3$  en dirección vertical y hacia arriba, de forma que la fuerza de gravedad sea  $\mathbf{b} = -g\mathbf{e}_3$ .

En segundo lugar, postulamos que el campo de tensión en el cuerpo sumergido es  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \rho g x_3 \mathbf{1}$ . Para verificar esta hipótesis basta con comprobar que tanto la condición de equilibrio en el cuerpo como las condiciones de contorno (la presión en el contorno es la debida al fluido) se cumplen:

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{b} = \rho g \mathbf{e}_e + \rho(-g)\mathbf{e}_3 = 0 , \quad \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \rho g x_3 \mathbf{n} = -p(\mathbf{x})\mathbf{n} . \quad (10.7.6)$$

Una vez comprobada la hipótesis basta con calcular la fuerza total sobre el cuerpo sumergido mediante el teorema de la divergencia:

$$\mathbf{F} = \int_{\partial\mathcal{B}_t} \mathbf{t} \, da = \int_{\partial\mathcal{B}_t} \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} \, da = \int_{\mathcal{B}_t} \text{div } \boldsymbol{\sigma} \, dv = \int_{\mathcal{B}_t} \rho g \mathbf{e}_3 \, dv = M g \mathbf{e}_3 , \quad (10.7.7)$$

que coincide con el resultado del principio de Arquímedes.

## 8. Condiciones de contorno en fluidos

Cuando se quiere resolver un problema concreto, ya sea de sólidos o fluidos, es necesario plantear las ecuaciones en derivadas parciales que lo gobiernan y las condiciones de contorno que sobre dicho cuerpo se imponen. En Mecánica de Fluidos este último aspecto es delicado y merece la pena dedicar una sección a describir los principales tipos posibles.

### Condición de contorno de velocidades impuestas (condición de Dirichlet)

En partes del contorno de un volumen material o de control las velocidades son a veces conocidas y de valor  $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)$ . Es el caso, por ejemplo, de el campo de velocidades en la entrada a un recipiente cualquiera cuando el fluido llega por una tubería. En este caso se sabe que el perfil de velocidades es parabólico o muy parecido. La expresión matemática de este tipo de condiciones de contorno es, si la región donde se conoce la velocidad es  $\Gamma_v$ , de la forma:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_v, \forall t . \quad (10.8.1)$$

### Condición de contorno de impenetrabilidad

Otra condición de contorno muy habitual es la que expresa que el flujo no puede penetrar en las paredes del recipiente que lo contiene. En este caso, y si el la pared del recipiente tiene vector normal  $\mathbf{n}$ , la velocidad del fluido ha de ser tangencial a esta superficie, es decir, que en la pared  $\Gamma_p$

$$(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Gamma_p, \forall t , \quad (10.8.2)$$

siendo  $\bar{\mathbf{v}}$  la velocidad de los puntos en la pared.

### Condición de adherencia

Los fluidos viscosos no sólo no pueden penetrar las paredes de los recipientes que los contienen sino que sus partículas en contacto con las paredes deben tener velocidad relativa nula con respecto a la posición de estas últimas. En este caso pues, la condición de contorno en toda pared  $\Gamma_p$  es:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_p, \forall t . \quad (10.8.3)$$

### Condición de contorno de tensiones o presiones

Además de las velocidades, también se pueden prescribir los valores de las tensiones en partes del contorno. Si los vectores de tensión tienen un valor conocido  $\bar{\mathbf{t}}$  en el contorno  $\Gamma_t$  entonces las este último tipo de condiciones de contorno son de la forma:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_t, \forall t \quad (10.8.4)$$

En algunas circunstancias únicamente se impone el valor de la presión  $p$

$$p(\mathbf{x}, t) = \bar{p}(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_t, \forall t . \quad (10.8.5)$$

### Condiciones de contorno mixtas

Es también posible imponer condiciones de contorno mixtas que incluyen velocidad y presión. Por ejemplo, se puede imponer en una región del contorno por un lado la presión y por otro las componentes tangenciales de la velocidad. Alternativamente, se podría imponer la componente tangencial de la tensión y la componente normal de la velocidad.

### Condición de superficie libre

La última condición, la de superficie libre, es algo más compleja y sirve para especificar, de forma implícita, la evolución de la superficie libre de un fluido en movimiento. A diferencia de las anteriores condiciones de contorno, esta sirve para determinar el contorno libre  $\Gamma_l$ , que no es fijo.

Existen dos maneras de establecer esta condición. La primera y más sencilla consiste en imponer que la superficie libre está formada por aquellos puntos del fluido cuya presión es igual a la del fluido que lo rodea. En el caso de un fluido situado al aire libre la condición se expresa como:

$$\Gamma_l = \{ \mathbf{x} : p(\mathbf{x}, t) = p_{atm} \} , \quad (10.8.6)$$

siendo  $p_{atm}$  la presión atmosférica.

Una aproximación frecuente que sirve para determinar la posición de la superficie libre es imponer que ésta se trata de una superficie material, es decir, formada siempre por las mismas partículas. Si dicha superficie viene expresada, en todo instante  $t$ , como una ecuación escalar de la forma  $\phi(\mathbf{x}, t) = 0$  y las partículas son siempre las mismas  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)$ , entonces

$$0 = \phi(\mathbf{x}, t) \Rightarrow 0 = \frac{D}{Dt} \phi(\mathbf{x}, t) = \text{grad } \phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} , \quad (10.8.7)$$

en todos los puntos  $\mathbf{x} \in \Gamma_l$ .





# Bibliografía

---

- J. E. Marsden and T. J. R. Hughes. *Mathematical foundations of elasticity*. Prentice-Hall Englewood Cliffs, 1983.
- C. Truesdell and W. Noll. *The non-linear field theories of mechanics*. Springer-Verlag, second edition, 1992.
- M. Gurtin. *An introduction to continuum mechanics*. Academic Press, 1981.
- R.W. Ogden. *Non-linear elastic deformations*. Dover, 1984.