Mecánica de sólidos

Ignacio Romero Olleros
Dpto. Ingeniería Mecánica
E.T.S.I. Industriales
Universidad Politécnica de Madrid
ignacio.romero@upm.es

9 de febrero de 2017

Capítulo 1

Fundamentos matemáticos

La mecánica de sólidos, como de hecho toda la mecánica de medios continuos, tiene una historia de varios siglos que ha ido en paralelo con muchos de los avances en matemáticas. Como es una teoría de campos, el cálculo diferencial e integral forman la base de la mecánica de sólidos. Además, hay otros conceptos matemáticos que simplifican enormemente la presentación de la teoría, pues proporcionan un lenguaje con el que la misma se expresa de forma más natural, y por tanto sencilla. Entre otros, destacan el cálculo y álgebra tensorial y el cálculo variacional. Existen muchos otras herramientas necesarias para una descripción más avanzada pero en estas notas nos limitaremos a los elementos más básicos e imprescindibles. Se pueden encontrar exposiciones más detalladas de álgebra y cálculo tensorial, por ejemplo, en, [4, 6, 7, 10, 9, 3].

1.1. Vectores en el espacio Euclídeo

La definición completa de un vector y un campo vectorial se puede consultar en libros básicos de álgebra. En lo que sigue, llamaremos ***vector*** simplemente a un elemento cualquiera de $\mathcal{V} = \mathbb{R}^d$, siendo $d = 3$ en estas notas, aunque la gran parte de los conceptos que se presentan son válidos también para otras dimensiones. Un ***campo vectorial*** definido en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es una función que para todo punto en Ω devuelve un vector en $\mathcal{V}$. Supondremos también que todos los campos vectores son infinitamente diferenciables.

Notación: Para diferenciar los vectores de los escalares se emplean en la literatura distintas notaciones. Así, dependiendo del libro u autor que se consulte, un mismo vector se puede ver escrito como $\boldsymbol{u}, \bar{u}, \vec{u}, \underline{u}, \ldots$ Entre todas estas, todas ellas válidas, utilizaremos la primera.

1.1.1. Componentes de un vector y cambio de base

Sea $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ una ***base*** cartesiana de $\mathcal{V}$. Cualquier vector $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ se puede expresar de la forma

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} v_i \boldsymbol{e}_i \ , \tag{1.1}$$

y v_1, v_2, v_3 se llaman las **componentes** de $\boldsymbol{v}$ en la base $\mathcal{B}$. Las componentes de un vector cambian según la base a la cuál se refieran, por lo tanto no se debe confundir el vector mismo con su representación.

Para expresar que una terna v_1, v_2, v_3 son las componentes del vector $\boldsymbol{v}$ en la base $\mathcal{B}$ escribiremos:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}} \ . \tag{1.2}$$

A menudo, cuando no hay posibilidad de confusión porque sólo se ha definido una base se emplea la notación

$$\{\boldsymbol{v}\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}} \ , \quad \text{o simplemente} \quad \boldsymbol{v} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \ . \tag{1.3}$$

La relación entre las componentes de un vector, referidas a dos bases distintas se obtiene de la siguiente manera. Sea $\mathcal{B}$ la base anteriormente definida y $\mathcal{B}'$ una nueva base cartesiana formada por los vectores ortonormales $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$. Un vector $\boldsymbol{e}_i$ cualquiera de la base $\mathcal{B}$ se puede expresar como suma de vectores de la base $\mathcal{B}'$ de la forma:

$$\boldsymbol{e}_i = a_{i1}\boldsymbol{e}'_1 + a_{i2}\boldsymbol{e}'_2 + a_{i3}\boldsymbol{e}'_3 \ , \quad \text{siendo} \quad a_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}'_j \ . \tag{1.4}$$

Otro vector cualquiera $\boldsymbol{v}$ se puede escribir indistintamente como combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}$ o de los de $\mathcal{B}'$:

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{3} v_i \boldsymbol{e}_i = \sum_{j=1}^{3} v'_j \boldsymbol{e}'_j \ . \tag{1.5}$$

Sustituyendo la expresión (1.4) e identificando las componentes se obtiene

$$v'_j = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} v_i \ . \tag{1.6}$$

Esta última relación se puede expresar matricialmente como

$$\begin{Bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}} \ , \tag{1.7}$$

o de forma compacta

$$\{\boldsymbol{v}\}_{\mathcal{B}'} = [A]^T \{\boldsymbol{v}\}_{\mathcal{B}} \ . \tag{1.8}$$

Si las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son ortonormales, la matriz de cambio de base $[A]$, es una matriz ortogonal, es decir, que verifica $[A]^{-1} = [A]^T$. Más aún, si las dos bases tienen la misma orientación, entonces el determinante de $[A]$ es igual a 1 y por tanto esta matriz es una rotación.

Es habitual referirse a los vectores de la base cartesiana de $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$ como $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ y las componentes de un vector $\boldsymbol{v}$ en dicha base como v_x, v_y, v_z.

1.1.2. Operaciones algebraicas básicas

Los vectores de $\mathbb{R}^d$ poseen las operaciones vectoriales básicas de suma y multiplicación por un escalar. Para realizar operaciones vectoriales nos vemos obligados a menudo a emplear las componentes de un vector, pero es importante recalcar que el resultado es independiente de la base escogida, siempre que todos los vectores que intervengan se expresen en la misma base. Por ejemplo, para calcular el vector $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, utilizamos las componentes de todos ellos en la base $\mathcal{B}$ y podemos emplear la expresión:

$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}} + \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}} \ . \tag{1.9}$$

Además, en el espacio euclídeo se define el ***producto escalar*** (Euclídeo) de dos vectores mediante la expresión

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \ . \tag{1.10}$$

El producto escalar, como el resto de operaciones de las que tratamos, es una operación *intrínsica* que no depende de la base escogida. La ***norma*** (Euclídea) de un vector se indicará como $|\boldsymbol{a}|$ y se define de la siguiente forma

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} \ . \tag{1.11}$$

El ángulo formado por dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ es por tanto

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|} \ . \tag{1.12}$$

Cualquier vector no nulo se puede normalizar, multiplicándose por el inverso de su norma, y obteniéndose un ***vector unitario***. Dado un vector cualquiera $\boldsymbol{a}$ y otro vector cualquiera unitario $\boldsymbol{u}$, se definen la proyección de $\boldsymbol{a}$ sobre $\boldsymbol{u}$ y la proyección de $\boldsymbol{a}$ sobre el plano normal a $\boldsymbol{u}$ como

$$\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{u}}^{\parallel} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{u} \ , \quad \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{u}}^{\perp} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{u}}^{\parallel} \ . \tag{1.13}$$

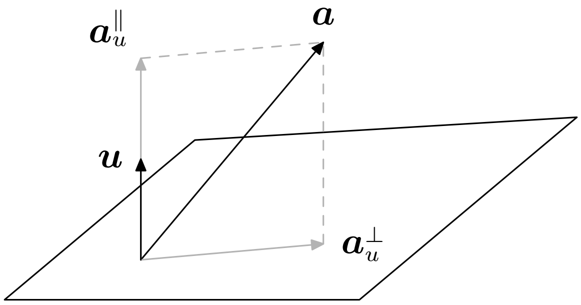

Figura 1.1: Descomposición de un vector según una dirección $\boldsymbol{u}$ y su plano perpendicular.

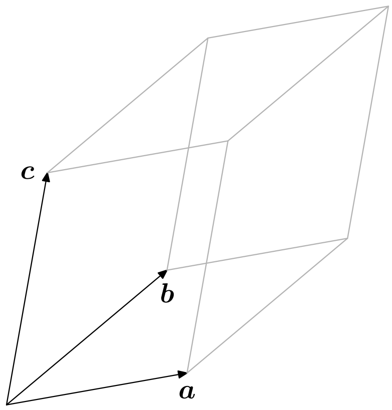

Figura 1.2: Paralelepípedo generado a partir de 3 vectors cuyo volumen puede ser calculado a partir del triple producto.

Esta descomposición es única y se puede escribir $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{u}}^{\parallel} + \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{u}}^{\perp}$. Véase la ilustración en la figura 1.1.

El ***producto vectorial*** de dos vectores se indica como $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ y, para cualquier base cartesiana $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, éste se calcula mediante la regla

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} , \tag{1.14}$$

y da lugar a un vector perpendicular a $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, orientado según la regla de la mano derecha y con módulo $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sin(\theta)$, siendo θ el ángulo desde $\boldsymbol{a}$ hasta $\boldsymbol{b}$. Por tanto, el área de un triángulo con lados $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ es

$$\text{área}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = \frac{1}{2} |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|. \tag{1.15}$$

El ***producto mixto*** o ***triple producto*** de tres vectors $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ se define como

$$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}] = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \ . \tag{1.16}$$

El triple producto es invariante frente a permutaciones pares de sus argumentos, pero cambia de signo cuando la permutación es impar. Además, se verifica:

$$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} . \tag{1.17}$$

En esta última expresión, el primer determinante es el que se obtiene al colocar los tres vectores en las columnas de una matriz, y el segundo en sus filas. El product mixto de tres vectores $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ es igual al volumen orientado de un paralelepípedo con lados paralelos a estos tres vectores.

1.2. Tensores

Los tensores son objetos son objetos del álgebra tan útiles como los vectores, y su uso en varias ramas de la mecánica es muy habitual. Por ejemplo, el tensor de inercia aparece en la descripción de la dinámica del sólido rígido. En la mecánica de sólidos y fluidos este tipo de objetos aparece constantemente y permite, como se explicará en esta sección, expresar de forma compacta las relaciones lineales entre vectores.

1.3. Tensores de segundo orden

Los ***tensores de segundo orden*** son los más comunes y a veces nos referiremos a ellos simplemente como "tensores", sobreentendiéndose que el orden al que se hace referencia es dos. Estos objetos se estudian en Álgebra estos y reciben el nombre de "endomorfismos lineales", y en estas notas se usará el símbolo $\mathcal{V}^2$ para referirnos a este conjunto. Los tensores de segundo orden son, pues, simplemente aplicaciones lineales de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{V}$, es decir, funciones lineales que transforman un vector en otro. Para cualquier vector $\mathcal{V}$, un tensor $\boldsymbol{T}$ es una operación lineal tal que $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{a})$ es otro vector. Por sencillez, los paréntesis se eliminan y se escribe simplemente $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{a}$. La propiedad fundamental, por tanto de los tensores es

$$\boldsymbol{T}(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{T}\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{T}\boldsymbol{b} , \tag{1.18}$$

siendo α, β dos números reales y $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ dos vectores.

Notación: Igual que en el caso de los vectores, existe una notación especial que permite distinguir los tensores de segundo orden del resto de objetos (escalares, vectores, …). También esta notación depende del autor o del libro que se consulte y un mismo tensor se puede escribir como $\boldsymbol{A}, \bar{\bar{A}}, \vec{\vec{A}}, \underline{\underline{A}}, \ldots$ En estas notas se empleará la primera de ellas y se evitará la confusión entre vectores y tensores de segundo orden empleando siempre que no se indique lo contrario letras minúsculas en el primer caso y mayúsculas en el segundo.

Dado un tensor $\boldsymbol{T}$ se define su ***transpuesto*** $\boldsymbol{T}^T$ como el único tensor que satisface

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{T}\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{T}^T \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} \ , \tag{1.19}$$

para cualquier pareja de vectores $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathcal{V}$. Se puede comprobar que, en cualquier sistema de coordenadas, la matriz correspondiente a $\boldsymbol{T}^T$ coincide con la matriz de componentes de $\boldsymbol{T}$, transpuesta.

1.3.1. Componentes y cambio de base

Recordamos que un tensor es simplemente una operación que transforma vectores en vectores, y que es lineal. Pues bien, en particular se pueden usar tensores y operarlos sobre los vectores de una base $\mathcal{B}$. Con ello se pueden definir las **componentes** de un tensor $\boldsymbol{T}$ como los nueve escalares

$$T_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot (\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_j) \ , \qquad i = 1,2,3 \qquad j = 1,2,3 \ . \tag{1.20}$$

Las componentes de un tensor referidas a una base $\mathcal{B}$ se muestran en forma de matriz, y se escribe

$$[\boldsymbol{T}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \tag{1.21}$$

de forma análoga a la expresión en un vector columna de un vector (1.2). Además, es fácil verificar que la matriz asociada a $\boldsymbol{T}^T$ es simplemente $[\boldsymbol{T}]^T$.

Como en el caso de los vectores, la matriz de un tensor en una base cualquiera no debe de confundirse con el tensor propiamente dicho.

La propiedad de linealidad de los tensores implica que las componentes del vector $\boldsymbol{b}$ que resulta de la aplicación de un tensor $\boldsymbol{T}$ sobre un vector $\boldsymbol{a}$ se pueden obtener multiplicando la matriz $[\boldsymbol{T}]_{\mathcal{B}}$ y el vector columna $\{\boldsymbol{a}\}_{\mathcal{B}}$. Es decir, si $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{a}$, entonces

$$\{\boldsymbol{b}\}_{\mathcal{B}} = [\boldsymbol{T}]_{\mathcal{B}} \{\boldsymbol{a}\}_{\mathcal{B}} \ , \tag{1.22}$$

o más explícitamente

$$\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}} \tag{1.23}$$

Observando la definición de las componentes de un tensor deducimos que éstas dependen de la base en la que se exprese el tensor. Para hallar la relación entre componentes de un mismo tensor en dos bases cartesianas distintas $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ escribimos la relación $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{a}$ en componentes de las dos bases.

$$\{\boldsymbol{b}\}_{\mathcal{B}} = [\boldsymbol{T}]_{\mathcal{B}} \{\boldsymbol{a}\}_{\mathcal{B}} \ , \quad \text{y} \quad \{\boldsymbol{b}\}_{\mathcal{B}'} = [\boldsymbol{T}]_{\mathcal{B}'} \{\boldsymbol{a}\}_{\mathcal{B}'} \ . \tag{1.24}$$

La expresión (1.8) relaciona las componentes de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ en las dos bases así que la segunda ecuación de (1.24) se puede escribir como

$$[A]^T\{\boldsymbol{b}\}_{\mathcal{B}} = [\boldsymbol{T}]_{\mathcal{B}'}[A]^T\{\boldsymbol{a}\}_{\mathcal{B}} \ . \tag{1.25}$$

Despejando $\{\boldsymbol{b}\}_{\mathcal{B}}$ y comparando el resultado con la primera ecuación de (1.24) se deduce que la expresión que relaciona las componentes de $\boldsymbol{T}$ en las dos bases consideradas es

$$[\boldsymbol{T}]_{\mathcal{B}} = [A][\boldsymbol{T}]_{\mathcal{B}'}[A]^T \ . \tag{1.26}$$

1.3.2. Operaciones algebraicas

Los tensores poseen las operaciones de suma, multiplicación y multiplicación por un escalar y estas se definen a partir de los conceptos correspondientes para vectores y la propiedad de linealidad. Por ejemplo, dados dos tensores $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$, el tensor suma $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ se define como aquel que aplicado a un vector cualquiera $\boldsymbol{v}$ resulta $\boldsymbol{C}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}$. El producto de dos tensores $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ es el único tensor que satisface

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}) \tag{1.27}$$

para cualquier vector $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$.

La expresión matricial del resultado de todas estas operaciones es la correspondiente operación matricial operada sobre las matrices de componentes de los tensores. Insistimos, como en el caso de los vectores, que el resultado es independiente de la base escogida.

Dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ pueden operarse mediante el llamado ***producto diádico***, o ***producto exterior***, resultando en un tensor de segundo orden $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$ definido por

$$(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) \ , \tag{1.28}$$

para cualquier vector $\boldsymbol{c}$.

La ***traza*** es una operación lineal sobre tensores definida mediante la relación

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \ , \tag{1.29}$$

sobre diádicas. Como todo tensor es la suma de 9 parejas diádicas se verifica

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{T}) = \operatorname{tr}(\sum_{i,j=1}^{3} T_{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) = \sum_{i,j=1}^{3} T_{ij} \operatorname{tr}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) = \sum_{i,j=1}^{3} T_{ij}\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \sum_{i=1}^{3} T_{ii} \ . \tag{1.30}$$

La traza de un tensor no depende tampoco de la base en la que se exprese su matriz de componentes y se dice que es por tanto un invariante del tensor. La operación traza es lineal así que, dado un escalar α y dos tensores $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{S}$,

$$\operatorname{tr}(\alpha\boldsymbol{T}) = \alpha \operatorname{tr}(\boldsymbol{T}) \ , \qquad \operatorname{tr}(\boldsymbol{T} + \boldsymbol{S}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{T}) + \operatorname{tr}(\boldsymbol{S}) \ . \tag{1.31}$$

El ***producto escalar*** entre tensores de orden dos se escribe con el símbolo ":" y se define como la operación que a toda pareja de tensores $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{S}$ asocia el escalar $\boldsymbol{T} : \boldsymbol{S}$ definido por

$$\boldsymbol{T} : \boldsymbol{S} = \operatorname{tr}(\boldsymbol{S}^T \boldsymbol{T}) . \tag{1.32}$$

En componentes, la operación de la doble contracción, como también se conoce a este producto escalar, es simplemente

$$\boldsymbol{T} : \boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} T_{ij} S_{ij} . \tag{1.33}$$

Como esta operación define un producto escalar, también se puede definir una ***norma*** asociada de tensores:

$$\|\boldsymbol{T}\| = \sqrt{\boldsymbol{T} : \boldsymbol{T}} . \tag{1.34}$$

El ***determinante*** de un tensor $\boldsymbol{T}$ es el escalar $\det(\boldsymbol{T})$ que verifica

$$[\boldsymbol{Ta}\ \boldsymbol{Tb}\ \boldsymbol{Tc}] = \det(\boldsymbol{T})[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}] . \tag{1.35}$$

Además, se puede demostrar, que el determinante se puede obtener calculando el determinante de la matriz de componentes del tensor, en cualquier base. El determinante es, por tanto, otro invariante del tensor. Cuando un tensor tiene determinante nulo, se dice que éste es ***singular*** y en caso contrario, ***regular***.

Por último, dado un tensor regular $\boldsymbol{T} \in \mathcal{V}^2$ cualquiera, existe un tensor $\boldsymbol{T}^{-1}$, denominado ***el tensor inverso*** de $\boldsymbol{T}$ tal que

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{I} . \tag{1.36}$$

El tensor inverso además, cuando existe, es único.

1.3.3. Tensores con propiedades especiales

Dependiendo de sus propiedades, los tensores se clasifican empleando unos calificativos idénticos a los de la clasificación de las matrices. En primer lugar, el ***tensor identidad*** $\boldsymbol{I}$ es el único que verifica $\boldsymbol{Ia} = \boldsymbol{a}$ para todo vector $\boldsymbol{a}$. La matriz de componentes de $\boldsymbol{I}$, en cualquier base, es la matriz identidad. El ***tensor nulo*** es el único tensor tal que $\boldsymbol{T} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{T}$, para cualquier tensor $\boldsymbol{T}$. Se dice que un tensor es ***simétrico*** si es igual a su traspuesto, y ***antisimétrico*** (o hemisimétrico) si es el opuesto de su traspuesto. Se comprueba inmediatamente que la matriz asociada a un tensor simétrico es simétrica, en cualquier base, y la matriz asociada a un tensor antisimétrico es a su vez antisimétrica, también en cualquier base.

Los tensores antisimétricos tienen una propiedad que emplearemos más adelante y es que el efecto de aplicar un tensor antisimétrico $\boldsymbol{W}$ sobre un vector cualquiera $\boldsymbol{a}$ es el mismo que el de multiplicar vectorialmente un vector $\boldsymbol{w}$, llamado el ***vector axial*** de $\boldsymbol{W}$, sobre $\boldsymbol{a}$. Es decir, que para todo vector $\boldsymbol{a}$,

$$\boldsymbol{W}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{a} \ , \tag{1.37}$$

e indicamos $\boldsymbol{w} = \text{axial}[\boldsymbol{W}]$. Además esta relación es recíproca, y por ello multiplicar vectorialmente un vector $\boldsymbol{w}$ por otro vector cualquiera $\boldsymbol{a}$ es equivalente a multiplicar un tensor antisimétrico $\boldsymbol{W}$, que es único, y que se llama el ***tensor antisimétrico asociado al vector*** $\boldsymbol{w}$.

Finalmente, decimos que un tensor es ***desviador*** si tiene traza nula y ***esférico*** si es de la forma $\boldsymbol{T} = p\boldsymbol{I}$, siendo p un escalar.

1.3.4. Descomposiciones de tensores

Todo tensor $\boldsymbol{T}$ se puede descomponer de forma única en una parte simétrica $\boldsymbol{T}^s$ y otra antisimétrica $\boldsymbol{T}^a$ de forma que $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^s + \boldsymbol{T}^a$. Se comprueba fácilmente que cada una de estas partes son:

$$\boldsymbol{T}^s = \frac{1}{2}(\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}^T) \ , \qquad \boldsymbol{T}^a = \frac{1}{2}(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}^T) \ . \tag{1.38}$$

Además, todo tensor $\boldsymbol{T}$ se puede descomponer de forma única en una parte esférica y otra desviadora. La parte esférica, que denominaremos $\boldsymbol{T}^{vol}$ tiene la misma traza que $\boldsymbol{T}$ y la parte desviadora $\boldsymbol{T}^{des}$ no tiene traza. Ambas se calculan así:

$$\boldsymbol{T}^{vol} = \frac{\text{tr}(\boldsymbol{T})}{3}\boldsymbol{I} \ , \qquad \boldsymbol{T}^{des} = \boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}^{vol} \ . \tag{1.39}$$

1.3.5. Autovectores y autovalores

Dado un tensor $\boldsymbol{T}$ cualquiera, se dice que el vector $\boldsymbol{v}$ es un autovector y λ su autovalor asociado si $\boldsymbol{v}$ es unitario y

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \ . \tag{1.40}$$

Para calcular los autovalores buscamos las soluciones no triviales de la identidad (1.40) y para ello hay que resolver la ecuación

$$\det(\boldsymbol{T} - \lambda\boldsymbol{I}) = 0 \ . \tag{1.41}$$

Esta ecuación es un polinomio de tercer grado que tiene por expresión

$$-\lambda^3 + I_1(\boldsymbol{T})\lambda^2 - I_2(\boldsymbol{T})\lambda + I_3(\boldsymbol{T}) = 0 \ . \tag{1.42}$$

Las funciones I_1, I_2, I_3 son los llamados ***invariantes principales*** del tensor $\boldsymbol{T}$, porque no dependen de la base, y su expresión explícita es

$$I_1(\boldsymbol{T}) = \text{tr}(\boldsymbol{T}) \ , \quad I_2(\boldsymbol{T}) = \frac{1}{2}(\text{tr}(\boldsymbol{T})^2 - \text{tr}(\boldsymbol{T}^2)) \ , \quad I_3(\boldsymbol{T}) = \det(\boldsymbol{T}) \ . \tag{1.43}$$

Como en álgebra de matrices, una vez calculados los tres autovalores λ_1, λ_2 y λ_3, se calculan sus autovectores asociados buscando las bases de los espacios nulos de los tensores

$$\boldsymbol{T} - \lambda \boldsymbol{I} \ , \tag{1.44}$$

que no son vacíos por definición. Cuando el tensor es simétrico, el siguiente teorema espectral garantiza que los autovalores y autovectores cumplen una propiedades especiales que se emplearán muy a menudo en la mecánica de sólidos deformables. Por su importancia incluimos una demostración del teorema.

Teorema 1.3.1. *Los tres autovalores de un tensor simétrico* $\boldsymbol{S}$ *son reales y sus tres autovectores asociados forman una base ortonormal, llamada la* **base principal** *del tensor, que denominamos* $\mathcal{B}^*$*. En esta base, la expresión matricial del tensor es:*

$$[\boldsymbol{S}]_{\mathcal{B}^*} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}^*} \ . \tag{1.45}$$

Demostración. Demostramos primero que los tres autovalores son reales. Como el polinomio característico de $\boldsymbol{S}$ es de tercer orden existen tres autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ que en principio pueden ser complejos. Si $\boldsymbol{v}$ es el autovector asociado a un autovalor λ de los tres y $\bar{\boldsymbol{v}}$ es el autovector conjugado entonces

$$\bar{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{S}\boldsymbol{v} = \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \lambda \boldsymbol{v} = \lambda |\boldsymbol{v}|^2 \ . \tag{1.46}$$

Conjugando ambos lados de la ecuación anterior, se obtiene

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{S}\bar{\boldsymbol{v}} = \bar{\lambda} |\boldsymbol{v}|^2 \ . \tag{1.47}$$

Igualando las identidades (1.46) y (1.47), y dado que $\boldsymbol{S}$ es un tensor simétrico, concluimos que $\lambda = \bar{\lambda}$, es decir que λ es real.

La demostración de la segunda parte es inmediata si los autovales son distintos, pero consideramos el caso más general. Como antes, sean $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ los tres autovalores de $\boldsymbol{S}$ (ordenados de cualquier manera) y $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ sus autovectores correspondientes. Si $\boldsymbol{w}$ es un vector ortogonal a $\boldsymbol{v}_1$, entonces $\boldsymbol{S}\boldsymbol{w}$ es también ortogonal a $\boldsymbol{v}_1$, porque $\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{S}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{w} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{w} = 0$. Así pues $\boldsymbol{S}$, cuando se restringe al subespacio de vectores ortogonales a $\boldsymbol{v}_1$ es también un tensor de ese conjunto a sí mismo. Por lo tanto tendrá dos autovalores y autovectores, que forzosamente deberán ser ortogonales a $\boldsymbol{v}_1$. Tomando uno cualquiera que llamamos λ_2 y $\boldsymbol{v}_2$ al autovector, repetimos el mismo argumento para el subespacio de vectores ortogonales a $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ para concluir que los tres autovectores son ortonormales.

En la base principal tenemos

$$\{\boldsymbol{v}_1\}_{\mathcal{B}^*} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}^*} \quad , \quad \{\boldsymbol{v}_2\}_{\mathcal{B}^*} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}^*} \quad , \quad \{\boldsymbol{v}_3\}_{\mathcal{B}^*} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}^*} \quad . \tag{1.48}$$

por lo que la expresión matricial de $\boldsymbol{S}$ ha de ser como se indica en (1.45). □

Un tensor simétrico con dos autovalores iguales se llama ***cilíndrico***, y cuando los tres son iguales, ***esférico***. En este último caso el tensor ha de ser proporcional al tensor identidad.

1.4. Tensores de cuarto orden

Aunque existen tensores de cualquier orden, sólo utilizaremos en este curso lo de orden dos y cuatro. Estos últimos se definen como aplicaciones lineales en el espacio de tensores de segundo orden y llamamos $\mathcal{V}^4$ al conjunto de todos los tensores de cuarto orden.

Notación: Igual que en el caso de los vectores y tensores , existe una notación especial para los tensores de cuarto orden. Esta notación, como las anteriores, cambia según el autor y libro siendo algunas de ellas $\overline{\overline{\overline{\overline{A}}}}, \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}$. En estas notas los tensores de cuarto orden se distinguirán for el tipo de letra y escribiremos simplemente $\mathbb{A}, \mathbb{B}$, etc.

La propiedad fundamental de un tensor de cuarto orden $\mathbb{C}$ es su linealidad, es decir, que siendo $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ dos tensores de segundo orden cualesquiera,

$$\mathbb{C}(\alpha \boldsymbol{A} + \beta \boldsymbol{B}) = \alpha \mathbb{C} \boldsymbol{A} + \beta \mathbb{C} \boldsymbol{B} \ , \tag{1.49}$$

cuando α y β son números reales. Además, de manera análoga a la operación "$\otimes$" definida entre vectores, se define el ***producto diádico de tensores de segundo orden*** como la operación $\otimes : \mathcal{V}^2 \times \mathcal{V}^2 \to \mathcal{V}^4$ que sirve para construir tensores de cuarto orden que satisfacen

$$(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} : \boldsymbol{C}) \ , \tag{1.50}$$

siendo $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ tres tensores cualesquiera.

El tensor identidad de cuarto orden, indicado como $\mathbb{I}$, verifica $\mathbb{I}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$, para cualquier tensor $\boldsymbol{A} \in \mathcal{V}^2$. Además, el tensor $\boldsymbol{I}^s$ es tal que $\boldsymbol{I}^s \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^s$.

1.5. Cálculo vectorial y tensorial

En Teoría de Campos se estudian los principales operadores diferenciales que actúan sobre los campos escalares y vectoriales que son el gradiente, la divergencia y el rotacional. Estos tres operadores tienen una definición *intrínseca*, independiente del sistema de referencia empleado, que presentaremos de la forma más directa posible. En la práctica, siempre utilizaremos estos operadores sobre campos cartesianos, donde su cálculo es muy sencillo. Como las operaciones intrínsecas son válidas en todos los sistemas de coordenadas, los resultados que se obtengan en sistemas cartesianos, si se pueden expresar en función de operaciones intrínsecas, serán válidos para cualquier sistema de referencia. Muchos más detalles pueden encontrarse en el texto [5].

El operador ***gradiente*** determina la parte lineal en una expansión en serie de Taylor de un campo escalar, o vectorial, o de mayor orden. El el caso escalar, siendo $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ un campo diferenciable en $\boldsymbol{x} \in \Omega$ se tiene que

$$\phi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}) = \phi(\boldsymbol{x}) + \nabla\phi(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{u} + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{u}\|^2) \tag{1.51}$$

donde la notación $\mathcal{O}(\|\boldsymbol{u}\|^2)$ indica que los términos que siguen son del orden de $\|\boldsymbol{u}\|^2$. El gradiente de un campo escalar es un campo vectorial cuyas componentes en un sistema cartesiano de coordenadas son:

$$\{\nabla\phi(x,y,z)\} = \begin{Bmatrix} \phi_{,x} \\ \phi_{,y} \\ \phi_{,z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{Bmatrix} . \tag{1.52}$$

De manera análoga, si $\boldsymbol{v} : \Omega \to \mathcal{V}$ es un campo vectorial diferenciable, también éste se puede expandir en serie de Taylor y la parte lineal se corresponde con el gradiente. En coordenadas cartesianas, este operador tiene por expresión:

$$[\nabla\boldsymbol{v}(x,y,z)] = \begin{bmatrix} v_{,xx} & v_{,xy} & v_{,xz} \\ v_{,yx} & v_{,yy} & v_{,yz} \\ v_{,zx} & v_{,zy} & v_{,zz} \end{bmatrix} . \tag{1.53}$$

El operador ***divergencia*** de un campo vectorial $\boldsymbol{v} : \Omega \to \mathcal{V}$ se define como

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \operatorname{tr}(\nabla\boldsymbol{v}) , \tag{1.54}$$

que en coordenadas cartesianas se puede calcular como

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}(x,y,z) = v_{x,x} + v_{y,y} + v_{z,z} . \tag{1.55}$$

Además, si $\boldsymbol{T} : \Omega \to \mathcal{V}^2$ es un campo tensorial diferenciable su divergencia es el campo vectorial unívocamente definido por la propiedad:

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{T})\boldsymbol{a} = \nabla \cdot (\boldsymbol{T}^T \boldsymbol{a}) , \tag{1.56}$$

siendo $\boldsymbol{a}$ un vector cualquiera en $\mathbb{R}^3$. En coordinadas cartesianas, la divergencia de un tensor tiene por componentes:

$$\big\{\nabla \cdot \boldsymbol{T}(x,y,z)\big\} = \begin{Bmatrix} T_{xx,x} + T_{xy,y} + T_{xz,z} \\ T_{yx,x} + T_{yy,y} + T_{yz,z} \\ T_{zx,x} + T_{zy,y} + T_{zz,z} \end{Bmatrix} . \tag{1.57}$$

Por último, siguiendo con el campo vectorial $\boldsymbol{u}$, su ***rotacional*** $\nabla \times \boldsymbol{u}$ es el campo vectorial definido por

$$\frac{1}{2}(\nabla \times \boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{a} = (\nabla \boldsymbol{u})^a \boldsymbol{a} \ , \tag{1.58}$$

para todo vector $\boldsymbol{a}$, siendo $(\nabla \boldsymbol{u})^a$ la parte hemisimétrica del gradiente de $\boldsymbol{u}$. En coordenadas cartesianas se verifica que:

$$\nabla \times \boldsymbol{v}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \ . \tag{1.59}$$

Existen numerosas relaciones entre los operadores diferenciales y teoremas integrales que los emplean. En este curso utilizaremos dos únicamente: el teorema de la divergencia y la fórmula de la integral por partes.

Teorema 1.5.1 (Teorema de Gauss o de la divergencia)**.** *Sea Ω un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ y $\varGamma$ su contorno. Si $\boldsymbol{v}$ es un campo vectorial definido en Ω se verifica:*

$$\int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\Omega = \int_\varGamma \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\varGamma \ , \tag{1.60}$$

siendo $\boldsymbol{n}$ la normal saliente a $\varGamma$. Si $\boldsymbol{T}$ es un campo tensorial sobre Ω, entonces

$$\int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{T} \, \mathrm{d}\Omega = \int_\varGamma \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\varGamma \ , \tag{1.61}$$

El teorema de la divergencia se aplicará en numerosas ocasiones. Un corolario del mismo es la expresión para la integral por partes: si ϕ es un campo escalar, entonces

$$\int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{v} \ \phi \, \mathrm{d}\Omega = \int_\varGamma \phi \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\varGamma - \int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \nabla \phi \, \mathrm{d}\Omega \ . \tag{1.62}$$

En el caso tensorial, si $\boldsymbol{T}$ es un campo tensorial como anterioremente, entonces

$$\int_\Omega (\nabla \cdot \boldsymbol{T}) \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\Omega = \int_\varGamma (\boldsymbol{T}\boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\varGamma - \int_\Omega \boldsymbol{T} : \nabla \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\Omega \ . \tag{1.63}$$

1.6. Coordenadas cilíndricas y esféricas

Por su interés para la resolución analítica de algunos problemas, se obtienen a continuación las matrices de cambio de coordenadas cartesianas a cilíndricas y esféricas.

1.6.1. Coordenadas cilíndricas

Las coordenadas de cualquier punto en $\mathbb{R}^3$ se puede expresar en un sistema cilíndrico, donde las coordenadas $(r, \theta, z) \in \sin \mathbb{R}^+ \times [-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$ están relacionadas con las cartesianas (x_1, x_2, x_3) mediante la relación

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \qquad \theta = \arctan \frac{x_2}{x_1}, \qquad z = x_3 \ , \tag{1.64}$$

y su relación inversa

$$x_1 = r \cos\theta \ , \qquad x_2 = r \sin\theta \ , \qquad x_3 = z \ . \tag{1.65}$$

Como no es un cambio de coordenadas biyectivo pueden aparecer problemas cuando $r = 0$. A diferencia de los sistemas cartesianos, las coordenadas cartesianas definen vectores de una base que cambian punto a punto. Estos vectores son tangentes a las curvas coordenadas en las que dos de las coordenadas se mantienen constantes y la tercera varía. Si se define una curva en $\mathbb{R}^3$ como $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(r, \theta, z)$, se pueden calcular los vectores unitarios tangentes a estas curvas como:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_r &= \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial r} \left| \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial r} \right|^{-1} = \cos\theta \boldsymbol{e}_1 + \sin\theta \boldsymbol{e}_2, \\
\boldsymbol{e}_\theta &= \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta} \left| \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta} \right|^{-1} = -\sin\theta \boldsymbol{e}_1 + \cos\theta \boldsymbol{e}_2, \\
\boldsymbol{e}_z &= \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial z} \left| \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial z} \right|^{-1} = \boldsymbol{e}_3 \ .
\end{aligned} \tag{1.66}$$

Usando la notación de la sección 1.3.1, la matriz de cambio de base y su inversa son, respectivamente,

$$[A_{cil}] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \qquad [A_{cil}^{-1}] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{1.67}$$

Se observa que cuando $r = 0$, la matriz $[A]$ es singular.

1.6.2. Coordenadas esféricas

Las coordenadas esféricas de un punto en el espacio Euclídeo son $(r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^+ \times [0, \pi) \times [-\pi, \pi)$ cuya relación con las coordenadas cartesianas es:

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \qquad \theta = \arctan \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3}, \qquad \phi = \arctan \frac{x_2}{x_1}. \tag{1.68}$$

La relación inversa es por tanto

$$x_1 = r \sin\theta \cos\phi \ , \qquad x_2 = r \sin\theta \sin\phi \ , \qquad x_3 = r \cos\theta \ . \tag{1.69}$$

Los vectores tangentes a las curvas coordenadas en un punto (r, θ, ϕ) son

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_r &= \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial r}\left|\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial r}\right|^{-1} = \sin\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_1 + \sin\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_2 + \cos\theta\boldsymbol{e}_3, \\
\boldsymbol{e}_\theta &= \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta}\left|\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta}\right|^{-1} = \cos\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_1 + \cos\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_2 - \sin\theta\boldsymbol{e}_3, \\
\boldsymbol{e}_\phi &= \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \phi}\left|\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \phi}\right|^{-1} = -\sin\phi\boldsymbol{e}_1 + \cos\phi\boldsymbol{e}_2 \ ,
\end{aligned}
\tag{1.70}
$$

y por lo tanto la matriz de transformación de coordenadas y su inversa son:

$$
\begin{aligned}
[A_{esf}] &= \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix}, \\
[A_{esf}^{-1}] &= \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{1.71}
$$

1.7. La transformada de Legendre

La transformada de Legendre es una operación muy utilizada en mecánica para cambiar la expresión funcional de una relación constitutiva. Como en termodinámica, esto se debe a que a menudo es conveniente cambiar las variables independientes que describen la respuesta de un material, o el equilibrio [2, 1].

En primer lugar recordamos que una ***función convexa*** definida sobre un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ es aquella que satisface, para todo $x, y \in \Omega$

$$
f((1-\alpha)x + \alpha y) \leq (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y) \ , \qquad \alpha \in [0,1] \ . \tag{1.72}
$$

Si la desigualdad es estricta cuando $\alpha \in (0,1)$ entonces se dice que la función f es ***estrictamente convexa***. Las funciones convexas gozan de numerosas propiedades, muchas de ellas relacionadas con problemas de optimización ([8]), por lo que se emplean muy a menudo en la formulación de modelos mecánicos. Dada una función no necesariamente convexa su ***transformada de Legendre*** f^* como

$$
f^*(y) = \max_x \left(xy - f(x)\right) \ . \tag{1.73}
$$

La transformada f^* se puede calcular de forma explícita en muchas ocasiones y cuando f es convexa, f^* también lo es.

▷ **Ejemplo 1.7.1.** Calcular la transformada de Legendre de $f(x) = \frac{k}{2}x^2$.

Sea $g(x, y) = xy - \frac{k}{2}x^2$, el máximo de esta función para un y dado se obtiene resolviendo $\frac{g(x,y)}{\partial x} = 0$, que resulta $x = y/k$. Por ello,

$$f^*(y) = \max_x g(x, y) = g(y/k, y) = \frac{y^2}{2\,k}. \tag{1.74}$$

◁

La transformada de Legendre cuenta con numerosas propiedades que hacen de ella una herramienta muy útil en matemática, física, termodinámica, etc. Por ejemplo, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función convexa y f^* su transformada de Legendre entonces se verifica que

$$y = \frac{\partial f}{\partial x}(x) \Leftrightarrow x = \frac{\partial f^*}{\partial y}(y). \tag{1.75}$$

1.8. Cálculo variacional

Además del cálculo integral y diferencial, el cálculo de variaciones o ***cálculo variacional*** resulta de gran utilidad para el desarrollo de la mecánica de sólidos deformables. Creado por Leonhard Euler para resolver el problema de la curva braquistócrona, este tipo de cálculo sirve para identificar condiciones de estacionariedad (mínimos, máximos o puntos de ensilladura) en funcionales diferenciables.

Si $\mathcal{F}$ es un espacio vectorial de funciones, un funcional es una función $I : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$. Por ejemplo, si $\mathcal{F}$ es el espacio de funciones reales de variable real definidas en $[0, 1]$, el funcional $I[v] = \int_0^1 v\,\mathrm{d}x$ calcula el área (con signo) bajo la función $v \in \mathcal{F}$. Otros funcionales calculan distancias, áreas, inercias, etc.

Si $I : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ es un funcional que posee un mínimo en $\bar{v}$, entonces $I[\bar{v}] \leq I[v]$ para cualquier $v \in \mathcal{F}$. Además, si este funcional es diferenciable, entonces

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} I[\bar{v} + \epsilon u] = 0\ , \tag{1.76}$$

para cualquier $u \in \mathcal{F}$ [1]. Esta condición, que debe de evaluarse para cada funcional I, da lugar a una ecuación diferencial llamada la ***ecuación de Euler-Lagrange*** del funcional, que caracteriza su punto estacionario.

▷ **Ejemplo 1.8.1.** Si $\mathcal{F}$ es el espacio (afín) de todas la funciones v diferenciables en $[0, 1]$ tales que $v(0) = 0, v(1) = 1$, encontrar la que minimiza el funcional

$$I[v] = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(v')^2 - v\right)\,\mathrm{d}x$$

[1] Si $\mathcal{F}$ es un espacio afín sobre el espacio vectorial $\mathcal{G}$, entonces $I : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ es mínimo si la ecuación (1.76) se cumple para todo $\boldsymbol{u} \in \mathcal{G}$.

Si u es una función tal que $u(0) = u(1) = 0$ entonces

$$0 = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} I[v + \epsilon u] = \int_0^1 \big(v' \, u' - u\big) \, \mathrm{d}x \ .$$

Integrando por partes se obtiene

$$0 = \int_0^1 \big(-v'' - 1\big) \, u \, \mathrm{d}x \ ,$$

identidad que sólo se cumple para todo u si el integrando es nulo, es decir,

$$-v'' = 1 \ .$$

Resolviendo esta ecuación diferencial, y utilizando las condiciones de contorno, se concluye que

$$v(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} x \ .$$

$\triangleleft$

1.9. Notación indicial

La notación empleada hasta ahora para indicar los vectores y tensores evita, en la major parte de las ocasiones, conocer y operar con las componentes individuales de cada uno de ellos. A veces, sin embargo, resulta útil hacer referencia de forma explícita a estas componentes y para ello existe una notación que, aunque aparentemente algo más compleja que la utilizada hasta el momento, facilita la demostración de algunas propiedades tensoriales y de ciertos teoremas. Esta notación, que ahora describimos, se conoce como ***notación indicial***.

Empecemos recordando que dada una base de vectores ortonormales $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, todo vector se puede expresar como una combinación lineal

$$\boldsymbol{v} = v_1 \boldsymbol{e}_1 + v_2 \boldsymbol{e}_2 + v_3 \boldsymbol{e}_3 \ , \tag{1.77}$$

expresión que se puede escribir de forma más compacta usando un sumatorio:

$$\boldsymbol{v} = \sum_{p=1}^{3} v_p \boldsymbol{e}_p \ . \tag{1.78}$$

Como es tedioso tener que escribir constantemente el símbolo de sumatorio e indicar sus límites (siempre son los mismos) se adopta la siguiente convención: en vez de las ecuaciones (1.77) ó (1.78) se escribe

$$\boldsymbol{v} = v_p \boldsymbol{e}_p \ . \tag{1.79}$$

En esta expresión, y en toda aquella en la que dos objetos que se multiplican tengan un mismo índice repetido, se entenderá que $v_p \boldsymbol{e}_p$ significa $v_1\,\boldsymbol{e}_1 + v_2\,\boldsymbol{e}_2 + v_3\,\boldsymbol{e}_3$. En vez del subíndice p se podría haber empleado cualquier otro, y así

$$v_p\,\boldsymbol{e}_p = v_q\,\boldsymbol{e}_q = v_i\,\boldsymbol{e}_i\ , \tag{1.80}$$

por lo que el índice repetido se denomina *mudo*. Se dice que la expresión (1.79) emplea notación indicial o también el convenio de Einstein. De esta manera, usando el convenio de Einstein, el producto escalar de dos vectores se escribiría simplemente como

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_i\, b_i\ . \tag{1.81}$$

Dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son iguales si $a_p\,\boldsymbol{e}_p = b_p\,\boldsymbol{e}_p$. Esta igualdad se puede reescribir como $(a_p - b_p)\boldsymbol{e}_p = \boldsymbol{0}$. Como los vectores de la base son linealmente independientes, esta última expresión requiere que cada componente se anule, es decir, $a_p - b_p = 0$, o de otra manera

$$a_p = b_p\ . \tag{1.82}$$

De este simple ejemplo se deduce que cuando en una igualdad aparezca un mismo índice en varios lugares, pero no multiplicándose, quiere decir que la igualdad es válida cuando el índice toma el valor 1,2 ó 3. Un índice de este tipo se denomina *libre* y puede intercambiarse por otra letra cualquiera, siempre que no se emplee en otra parte de la igualdad. Por ejemplo, la identidad (1.82) quiere expresar

$$a_1 = b_1\ , \qquad a_2 = b_2\ , \qquad a_3 = b_3\ . \tag{1.83}$$

Cuando se trabaja con tensores de segundo orden también se emplea una base tensorial de nueve tensores:

$$\{\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_3\}\ , \tag{1.84}$$

y todo tensor $\boldsymbol{T}$ se puede escribir como combinación lineal de estos tensores más simples, es decir,

$$\boldsymbol{T} = T_{11}\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 + T_{12}\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2 + T_{13}\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_3 + T_{21}\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1 + \ldots \tag{1.85}$$

En este caso se observa aún más claramente que resulta muy tedioso escribir y trabajar con las nueve componentes de un tensor. Se podría escribir la expresión previa como

$$\boldsymbol{T} = \sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} T_{pq}\,\boldsymbol{e}_p \otimes \boldsymbol{e}_q\ , \tag{1.86}$$

pero igual que con los vectores, se adopta la convención de que esta última expresión se puede escribir simplemente como

$$\boldsymbol{T} = T_{pq}\, \boldsymbol{e}_p \otimes \boldsymbol{e}_q \ . \tag{1.87}$$

Como en el caso de los vectores, los índices repetidos cuyos objetos correspondientes se multiplican expresan un sumatorio, con dicho índice tomando valores 1, 2 y 3.

También como en el caso de los vectores, aquellos índices libres que aparecen repetidos en varios lugares de una igualdad, pero cuyas componentes correspondientes no se multiplican indican que la igualdad es válida cuando los índices toman valores 1,2 y 3. Así por ejemplo $T_{ij} + R_{ij} = \alpha$ quiere decir que la suma de cualquier componente del tensor $\boldsymbol{T}$ de segundo order más la misma componente del tensor de segundo orden $\boldsymbol{R}$ es igual a α.

Las consideraciones aquí presentadas son válidas también para tensores de mayor orden. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} A_{ijk}v_j &= A_{i1k}v_1 + A_{i2k}v_2 + A_{i3k}v_3 \\ S_{pqr}T_{ir} &= S_{pq1}T_{i1} + S_{pq2}T_{i2} + S_{pq3}T_{i3} \ . \end{aligned} \tag{1.88}$$

El producto tensorial de dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ se puede expresar en notación indicial como

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \ , \tag{1.89}$$

siendo ε_{ijk} el tensor de tercer orden con componentes

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j,k) = (1,2,3) \text{ u otra combinación par} \\ -1 & \text{si } (i,j,k) = (2,1,3) \text{ u otra combinación par} \\ 0 & \text{si algún índice está repetido.} \end{cases} \tag{1.90}$$

De manera equivalente, el símbolo ε también se puede definir como

$$\varepsilon_{ijk} = \det[\boldsymbol{e}_i\ \boldsymbol{e}_j\ \boldsymbol{e}_k], \tag{1.91}$$

es decir, como el determinante de una matriz cuyas columnas son los vectores $\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k$.

Este tensor satisface la identidad $\delta - \varepsilon$ que es muy útil para demostrar algunos resultados en álgebra y cálculo tensorial. Esta relación establece la igualdad

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ipq} = \delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{jq}\delta_{kp} \ . \tag{1.92}$$

Notación indicial para los operadores diferenciales. Definimos la notación $\phi_{,i}$ para indica la derivada parcial de un campo escalar ϕ, es decir,

$$\phi_{,i} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \ , \tag{1.93}$$

y extendemos esta notación a los campos vectoriales y tensoriales, y a derivadas de orden más alto. Si $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es un campo escalar, $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{V}$ es un campo vectorial, y $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{V}^2$ es un campo vectorial, podemos expresar sus operadores diferenciales de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
\nabla\phi &= \phi_{,i}\,\boldsymbol{e}_i \ , \\
\nabla\boldsymbol{v} &= v_{i,j}\,\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \ , \\
\nabla\cdot\boldsymbol{v} &= v_{i,i} \ , \\
\nabla\cdot\boldsymbol{T} &= T_{ij,j}\,\boldsymbol{e}_i \ , \\
\nabla\times\boldsymbol{v} &= \varepsilon_{ijk} v_{i,j}\,\boldsymbol{e}_k \ ,
\end{aligned}
\tag{1.94}
$$

Problemas

1.1. Los vectors $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ tienen componentes cartesianos

$$
\boldsymbol{a} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} .
$$

Se considera ahora la base $\tilde{\mathcal{B}} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ con

$$
\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}) \ , \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}) \ , \quad \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{k} \ .
$$

a) Calcular la matriz de cambio de base.

b) Calcular las componentes de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ en la base $\tilde{\mathcal{B}}$

c) Comprobar que el producto escalar $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ es el mismo en las dos bases consideradas.

d) Demostrar que este resultado es válido para cualquier base ortonormal. Indicar por qué es importante que los vectores de la base sean unitarios.

1.2. Para cualquier tensor $\boldsymbol{T}$ de segundo orden, demuestra las siguientes relaciones:

$$
a)\ \boldsymbol{I} : \boldsymbol{T} = \operatorname{tr}(\boldsymbol{T}), \qquad b)\ \boldsymbol{T}^{vol} : \boldsymbol{T}^{des} = 0 \ , \qquad c)\ \boldsymbol{T}^{s} : \boldsymbol{T}^{a} = 0 \ .
$$

1.3. Comprueba que, para cualquier campo escalar $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$
\nabla\times\nabla\phi = \boldsymbol{0}.
$$

1.4. Si desv[ ] es la operación que obtiene la parte desviadora de un tensor, demuestra la identidad:

$$
\operatorname{desv}[(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I})\boldsymbol{A}] = \boldsymbol{0} \ .
$$

1.5. Demuestra las identidades

a) $\boldsymbol{A} : (\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}) : \boldsymbol{C}$ *b)* $\mathrm{tr}(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ *c)* $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}$.

siendo $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ tensores de segundo orden y $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, vectores.

1.6. Si $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ son dos vectores cualesquiera y $\boldsymbol{a} = \mathrm{axial}[\boldsymbol{A}], \boldsymbol{b} = \mathrm{axial}[\boldsymbol{B}]$ comprueba que

$$\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = 2\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\ .$$

1.7. Demuestra las identidades

a) $\nabla\cdot(\boldsymbol{T}\boldsymbol{v}) = (\nabla\cdot\boldsymbol{T}^T)\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{T}^T : \nabla\boldsymbol{v}$. *b)* $\nabla(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{A}$,

siendo $\boldsymbol{T}$ un campo tensorial, $\boldsymbol{v}$ un campo vectorial, $\boldsymbol{a}$ un vector constante, $\boldsymbol{a} = \mathrm{axial}[\boldsymbol{A}]$ y $\boldsymbol{r} = \sum_i^3 x_i\,\boldsymbol{e}_i$.

1.8. Demuestra las identidades el teorema de Gauss para campos tensoriales (la identidad (1.62)), la expresión vectorial de la fórmula de la integral por partes (la identidad (1.62)) y la expresión tensorial de ésta última (la fórmula (1.63)).

1.9. Si $\mathcal{R}\subset\mathbb{R}^3$, demuestra, usando la fórmula de la integral por partes y el resultado del problema 1.6

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{A}\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}A = \int_{\mathcal{R}} (\boldsymbol{r}\times(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) + 2\,\mathrm{axial}[\boldsymbol{A}^a])\,\mathrm{d}V\ , \tag{1.95}$$

siendo $\boldsymbol{A}$ un campo tensorial, $\boldsymbol{r} = \sum_i^3 x_i\,\boldsymbol{e}_i$, y $\boldsymbol{n}$ la normal saliente al contorno $\partial\mathcal{R}$.

1.10. Determina el valor de los escalares α, β que satisfacen

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \alpha\boldsymbol{b} - \beta\boldsymbol{c}\ ,$$

para cualquier terna $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\in\mathcal{V}$.

1.11. Demuestra, a partir de la definición intrínseca de la función determinante,

$$\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{A})\ \det(\boldsymbol{B})$$

1.12. Si $\boldsymbol{a}$ es un vector cualquiera y $\boldsymbol{u}$ un vector unitario, demuestra

$$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{u}\ .$$

1.13. Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función convexa y f^* su transformada de Legendre, demuestra que para cualquier pareja $x, y\in\mathbb{R}$,

$$f(x) + f^*(y) \geq xy\ .$$

1.14. Calcula la transformada de Legendre de

$$a)\ f(x) = \frac{1}{2}kx^2, \qquad b)\ g(x) = e^x.$$

1.15. Demuestra las siguientes identidades usando notación indicial:

a) $\nabla \wedge (\nabla \phi) = \mathbf{0}$, para toda función escalar ϕ.

b) $\nabla \cdot (\nabla \wedge \boldsymbol{a}) = 0$, para todo vector $\boldsymbol{a}$.

c) $\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$, siendo $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ vectores.

d) $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{a} : \hat{\boldsymbol{a}} = 0$, para cualquier vector $\boldsymbol{a}$.

e) $\boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n} - \hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{I}$, siendo $\boldsymbol{n}$ un vector unitario.

f) Si $\boldsymbol{A}$ es un tensor simétrico de segundo orden y sus invariantes principales son I_1, I_2, I_3,

$$\frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{A}} = \boldsymbol{I}\ , \qquad \frac{\partial I_2}{\partial \boldsymbol{A}} = I_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\ , \qquad \frac{\partial I_3}{\partial \boldsymbol{A}} = \det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}\ .$$

1.16. Demostrar la identidad $\delta - \varepsilon$ de la ecuación (1.92).

Bibliografía

[1] V I Arnold. *Mathematical methods of classical mechanics.* Springer, 1989.

[2] H B Callen. *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics.* Wiley, United States, second edition, 1985.

[3] K D Hjelmstad. *Structural mechanics.* Springer Science+Business Media, second edition, 2005.

[4] L E Malvern. *Introduction to the Mechanics of a Continuum Medium.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1969.

[5] J E Marsden and T J R Hughes. *Mathematical foundations of elasticity.* Prentice-Hall Englewood Cliffs, 1983.

[6] G E Mase. *Continuum Mechanics.* McGraw-Hill, 1970.

[7] X Oliver and C Agelet de Saracibar. *Mecánica de medios continuos para ingenieros.* Ediciones UPC, 2000.

[8] R T Rockafellar. *Convex analysis*, volume 28. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[9] W S Slaughter. *The linearized theory of elasticity.* Birkhauser, Boston, 2002.

[10] A M Stuart and O Gonzalez. *A first course in continuum mechanics.* Cambridge University Press, 2008.