Capítulo 5

Termoelasticidad lineal

En el capítulo anterior estudiamos el modelo más sencillo de la mecánica de sólidos, a saber, el de los cuerpos elásticos. En este análisis encontramos la relación que existe entre las tensiones y las deformaciones a nivel de punto material.

La experiencia cotidiana nos dice que para que un cuerpo se deforme no es imprescindible aplicar fuerzas sobre él. Por ejemplo, cuando un sólido adsorbe agua, éste se hincha. También, cuando un cuerpo se calienta (habitualmente) crece en volumen.

En este capítulo estudiamos la ***termoelasticidad***, la extensión de la elasticidad que estudia el comportamiento de sólidos sometidos a saltos térmicos. Lejos de ser una curiosidad, se observa que este tipo de efectos son extremadamente comunes en máquinas térmicas, en estructuras sometidas a la intemperie, en vehículos, y por tanto su estudio está totalmente justificado.

5.1. Leyes constitutivas termoelásticas

Así como la relación entre las tensiones y deformaciones se observa cotidianamente, también se aprecia en multitud de situaciones que los campos de temperatura y tensión/deformación están acoplados. Así pues, si se calienta un cuerpo éste se deforma y a veces aparecen en él tensiones. Más aún, en ciertos materiales se observa que incluso una deformación elástica produce cambios de temperatura (el llamado efecto Gough-Joule). Este problema acoplado es en general muy complejo, pero si sólo se considera el acoplamiento en un sentido (la temperatura produce deformaciones pero viceversa) su formulación es sencilla. Además en esta sección nos limitaremos a estudiar materiales elásticos isótropos

Se comprueba experimentalmente que un cuerpo isótropo, homogéneo y libre de coacciones ($\Gamma_u = \emptyset$), cuando se calienta uniformemente se deforma sin que aparezcan tensiones. Esta deformación de origen puramente térmico es únicamente volumétrica y proporcional al incremento térmico y a un ***coeficiente de dilatación térmica*** que indicamos con el símbolo α y con dimensiones de temperatura inversa. Llamando $\boldsymbol{\varepsilon}_{ter}$ a las deformaciones térmicas se cumple por tanto

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ter} = \alpha\,\Delta T \boldsymbol{I}\ , \tag{5.1}$$

siendo ΔT el salto térmico respecto a una temperatura en la que no existen deformaciones térmicas. En general, para materiales no isótropos, se define un tensor $\boldsymbol{\alpha}$ de dilatación térmica, con las mismas dimensiones que el coeficiente α tal que

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ter} = \Delta T\ \boldsymbol{\alpha}\ . \tag{5.2}$$

Admitiendo el principio de superposición, podemos formular una ***ley de Hooke generalizada con efectos térmicos*** de la forma

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{mec} + \boldsymbol{\varepsilon}_{ter} = \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma})\ \boldsymbol{I} + \alpha\,\Delta T \boldsymbol{I}\ . \tag{5.3}$$

La deformación tiene por tanto dos componentes: una mecánica y otra térmica. Esta relación, válida en cualquier sistema de coordenadas, tiene la siguiente expresión en componentes cartesianas:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{yy}+\sigma_{zz}) + \alpha\Delta T\ , &\qquad \gamma_{xy} &= \frac{\sigma_{xy}}{G} \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{zz}+\sigma_{xx}) + \alpha\Delta T\ , &\qquad \gamma_{xz} &= \frac{\sigma_{xz}}{G} \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\sigma_{zz}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}) + \alpha\Delta T\ , &\qquad \gamma_{yz} &= \frac{\sigma_{yz}}{G}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

La relación de Hooke (5.3) se puede invertir para obtener las ecuaciones de Lamé con efecto de la temperatura. Como en la sección 4.2.3, para despejar la tensión de las ley de Hooke aplicamos el operador traza a ambos lados de la identidad (5.3) y obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \frac{1+\nu}{E}\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}) - \left(\frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}) + \alpha\Delta T\right)\ \mathrm{tr}(\boldsymbol{I}) \\
&= \frac{1-2\nu}{E}\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}) + 3\alpha\Delta T\,.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Así pues, la traza de la tensión es

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{E}{1-2\nu}\theta - \frac{3\alpha\,E}{1-2\nu}\Delta T\ . \tag{5.6}$$

Sustituyendo este resultado en (5.3) obtenemos finalmente las ecuaciones de Lamé con efecto de la temperatura:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda\theta\boldsymbol{I} - \beta\Delta T\boldsymbol{I} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - \beta\Delta T\boldsymbol{I}, \tag{5.7}$$

siendo β la constante

$$\beta = 3\alpha\kappa \ . \tag{5.8}$$

El tensor $-\beta\Delta T\boldsymbol{I}$ se conoce con el nombre de la tensión de origen térmico, así pues

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{mec} + \boldsymbol{\sigma}_{ter} \ , \tag{5.9}$$

es decir, que en un sólido elástico sometido a deformación y a cambio de temperatura las tensiones tiene dos componentes, una mecánica, que es consecuencia de la deformación, y otra térmica, que puede ser no nula aunque el cuerpo no se deforme. Nótese que un un cuerpo que no se puede deformar libremente, si se somete a un salto térmico, desarrolla tensiones de origen térmico no nulas. Estas tensiones pueden ser muy grandes en elementos de máquinas sometidos a altas temperatura de funcionamente si éstos no se diseñan cuidadosamente.

▷ **Ejemplo 5.1.1.** Un cilindro de goma con diámetro $d = 20$ mm y longitud $L = 200$ mm se aloja en una cavidad cilíndrica de diámetro $D = 20,05$ mm. Sobre el cilindro se coloca un pistón rígido.

a) Calcular el estado tensional y de deformación en el cilindro si el pistón lo comprime con una fuerza total de 1000 N (nótese que el estado de tensión es cilíndrico). Indicar la longitud del cilindro deformado.

b) Calcular otra vez el estado tensional y de deformación en el cilindro si, manteniendo fijo el pistón, el conjunto se calienta 140 °C.

Datos: suponer que las paredes del cilindro y el pistón son infinitamente rígidas y que no ejercen ningún rozamiento sobre el cilindro. Constantes del material del cilindro: $E = 500$ MPa, $\nu = 0{,}48$, $\alpha = 20 \cdot 10^{-6} (^\circ\mathrm{C})^{-1}$.

El estado tensional y de deformación será, en los dos casos, cilíndrico y homogéneo (debido a la simetría del la geometría y cargas, a la ausencia de fuerzas volumétricas y de rozamiento). Si escogemos un sistema de coordenadas cartesiano tal que el eje x coincida con el eje del cilindro, la expresión matricial del la tensión y deformación en este sistema será

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & q \end{bmatrix} , \qquad [\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix} .$$

Estudiamos ahora por separado los dos casos de carga:

a) Cuando se comprime el cilindro no se sabe si éste contacta con la cavidad. Suponiendo que no contacta, la única componente no nula del tensor de tensiones es σ_{xx} y su valor es $\sigma_{xx} = -P/A$ siendo $A = \frac{\pi}{4}20^2$ mm^2 el área de la sección. La longitud del diámetro deformado bajo esta hipótesis sería:

$$d' = (1 + e)d = (1 - \frac{\nu}{E}\sigma_{xx})d = (1 + 3{,}06 \cdot 10^{-3})d = 20,06 \text{ mm} \ .$$

Este resultado contradice la hipótesis de que el cilindro no toca la cavidad, así que no puede ser cierta. Si el contacto ocurre, entonces la tensión q ha de ser no nula, y la deformación en dirección radial e es conocida y de valor $e = 0,05/20 = 2,5 \cdot 10^{-3}$. El resto de componentes de los tensores de tensión y deformación se calculan a partir de las ecuaciones de Lamé o de la ley de Hooke generalizada:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -P/A = -3,18 \text{ MPa} , \\ q &= \frac{1}{1-\nu}(E\,e + \nu\sigma_{xx}) = -0,53 \text{ MPa} , \\ \varepsilon_{xx} &= \frac{\sigma_{xx}}{E} - 2\nu q = -5,34 \cdot 10^{-3} . \end{aligned}$$

La longitud del cilindro deformado es: $L' = (1 + \epsilon_{xx})L = 198,93$ mm.
b) Suponemos, como en el caso anterior, que al dilatarse el cilindro, éste no toca con las paredes de la cavidad. En este caso, obtenemos en primer lugar la tensión en dirección axial en el cilindro a partir de la condición de que la longitud de éste no varía:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} + \alpha\,\Delta T = 0 \Longrightarrow \sigma_{xx} = -\alpha E\,\Delta T = -1{,}4 \text{ MPa} .$$

A partir de ésta calculamos el diámetro deformado:

$$d' = (1 + \varepsilon_{xx})\,d = (1 - \frac{\nu}{E}\sigma_{xx} + \alpha\,\Delta T)d = 20,08 \text{ mm} ,$$

que es contrario a la hipótesis. Por lo tanto se puede garantizar que habrá contacto entre cilindro y cavidad y que, como en el caso primero, $e = 2,5 \cdot 10^{-3}$. Planteamos las ecuaciones de Hooke para las deformaciones en dirección x y radial y obtenemos

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\sigma_{xx}}{E} - 2\frac{q}{E} + \alpha\,\Delta T \ (= 0) , \\ e &= \frac{1-\nu}{E}q - \frac{\sigma_{xx}}{E} + \alpha\,\Delta T \ (= 2{,}5 \cdot 10^{-3}) , \end{aligned}$$

y resolvermos las dos incógnitas q y σ_{xx} que resultan tener valores $\sigma_{xx} = -14,44$ MPa y $q = -13,89$ MPa. $\triangleleft$

5.2. El problema termoelástico

La ecuación del equilibrio de los sólidos termoelásticos es las misma que la de los sólidos puramente elásticos, tal y como se presentó en el capítulo 4. La única diferencia pues entre el problema elástico y termoelástico es la relación constitutiva, relación que en el segundo caso tiene en cuenta las deformaciones y tensiones de origen térmico.

Figura 5.1: Jean-Marie Duhamel (1797-1872) (Wikipedia).

El problema termoelástico puede reescribirse de una manera tal que la temperatura entre sólo en la formulación a través de las fuerzas exteriores y que las ecuaciones que describen este problema asociado sean idénticas a las de la elasticidad. Para demostrar esto describimos la llamada ***equivalencia de Duhamel***, que parte de la definición de una tensión aparente

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma} + \beta\, \Delta T \boldsymbol{I} \ . \tag{5.10}$$

Es inmediato comprobar que esta tensión ficticia verifica

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^* + \bar{\boldsymbol{f}}^* = \boldsymbol{0} \ , \\ &\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbb{C}\, \boldsymbol{\varepsilon} \ , \\ &\boldsymbol{\sigma}^* \boldsymbol{n} = \bar{\boldsymbol{t}}^* \ , \end{aligned} \tag{5.11}$$

siendo $\bar{\boldsymbol{f}}^*$ el campo de fuerzas volumétricas aparente

$$\bar{\boldsymbol{f}}^* = \bar{\boldsymbol{f}} + \operatorname{grad}[\beta\, \Delta T] \ , \tag{5.12}$$

y $\bar{\boldsymbol{t}}^*$ el campo de fuerzas de superficie

$$\bar{\boldsymbol{t}}^* = \bar{\boldsymbol{t}} + \beta \Delta T \boldsymbol{n} \ . \tag{5.13}$$

En el problema (5.11) los términos “aparentes” no tienen significado físico, pero queda claro que estas ecuaciones son idénticas a las que gobiernan el comportamiento de un sólido elástico en el que los efectos de la temperatura aparecen, como dato, en la definición de las cargas. Empleando esta equivalencia, el campo de temperatura se emplea para definir $\bar{\boldsymbol{f}}^*$ y $\bar{\boldsymbol{t}}^*$; una vez obtenida la tensión $\boldsymbol{\sigma}^*$ y los campos de desplazamiento y deformación reales, la tensión $\boldsymbol{\sigma}$ se puede obtener sin más que invertir la relación (5.10).

Concluimos esta sección utilizando la equivalencia de Duhamel para demostrar que un sólido isótropo y homogéneo, no sometido a fuerzas de volumen ni sujeto en su contorno, está libre de tensiones si tiene una temperatura uniforme. Si la temperatura y el parámetro β son homogéneos, y el cuerpo no está sometido a fuerzas de volumen, las cargas volumétricas ficticias $\bar{\boldsymbol{f}}^*$ son nulas. De la ecuación $(5.11)_1$ concluimos que la tensión ficticia ha de ser constante y de la ecuación (5.10), que también la tensión real ha de serlo. Por último, de la relación $(5.11)_3$ se sigue que, como $\bar{\boldsymbol{t}} = \mathbf{0}$, la tensión $\boldsymbol{\sigma}$ debe ser nula.

Problemas

5.1. Una barra cilíndrica de radio r y longitud L está colocada entre dos paredes rígidas a distancia L de tal manera que las caras planas de la barra se apoyan sobre las paredes. Estas caras están lubricadas por lo que la barra sólo sufre tensiones normales en las caras de contacto con las paredes. Si la barra sufre un incremento térmico $\Delta T > 0$,

- encontrar el campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ y deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$ en todos los puntos de la barra;
- postular un campo de desplazamiento $\boldsymbol{u}$ para la barra que verifique las condiciones de contorno y $\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \boldsymbol{u}$.

5.2. Demuestra que al someter un cuerpo de un material elástico, isótropo y homogéneo a un salto térmico homogéneo, no aparecen tensiones en éste si no tiene desplazamientos restringidos, esto es, si $\bar{\boldsymbol{t}} = \mathbf{0}$ en todo su contorno.