

Capítulo 6

Principios variacionales y termodinámica de sólidos deformables

La energía es el concepto fundamental de cualquier teoría mecánica pues sirve como principio unificador de todo el resto y permite combinar modelos distintos o incluso de campos diferentes (electro-mecánica, magnetismo - mecánica, química - mecánica, etc).

Como en tantos otros modelos, la energía proporciona la base para la formulación de principios variacionales, es decir, enunciados (no demostrables) que caracterizan de forma integral la solución del problema [7, 3]. Aunque sólo se estudiará una pequeña parte de los numerosos principios que existen, éstos serán fundamentales para el cálculo de estructuras y para el desarrollo de métodos numéricos como los elementos finitos, la herramienta más común para el cálculo y diseño en ingeniería mecánica [4, 1].

Además de la energía, es bien conocido que las leyes de la termodinámica proporcionan la base de todo proceso físico. En este capítulo también trataremos de las consecuencias que tienen estas leyes fundamentales en la formulación de modelos de sólidos deformables.

6.1. El trabajo de las fuerzas exteriores sobre un cuerpo deformable

El concepto de trabajo es central en mecánica y comenzamos por definirlo en el contexto de los sólidos deformables antes de entrar en conceptos más abstractos. Para un cuerpo deformable cualquiera, sólo está definido el trabajo realizado durante un incremento (diferencial) del campo de desplazamientos (o equivalentemente, la potencia mecánica). Como existen dos tipos de fuerzas que se pueden aplicar sobre un cuerpo deformable, a saber,

volumétricas y de superficie, el valor instantáneo de la **potencia mecánica** ejercida sobre el cuerpo es:

$$P_{ext} = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{f}} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV + \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \dot{\mathbf{u}} dS, \quad (6.1)$$

siendo $\dot{\mathbf{u}} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}$, el campo de velocidad. Si lo que se desea es calcular el trabajo total realizado durante un proceso de carga completo sobre un cuerpo deformable la definición debe de integrar (6.1).

Definición 6.1.1. Sea un cuerpo deformable sometido a un proceso de carga fuerzas externas volumétricas y de superficie $(\tilde{\mathbf{f}}(t), \tilde{\mathbf{t}}(t))$ definidas en el intervalo $t \in [0, T]$. Si en cada instante el campo de desplazamientos es $\tilde{\mathbf{u}}(t)$ entonces el **trabajo de las fuerzas externas** durante dicha deformación se define mediante la integral:

$$W_{ext} = \int_0^T \left[\int_{\Omega} \tilde{\mathbf{f}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{u}}} dV + \int_{\Gamma_t} \tilde{\mathbf{t}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{u}}} dA \right] dt. \quad (6.2)$$

Esta definición es completamente general y revela que la definición de trabajo depende del proceso de carga, no sólo de los valores iniciales y finales de $\tilde{\mathbf{f}}$ y $\tilde{\mathbf{t}}$. Esto complica enormemente el cálculo del trabajo, porque requiere la determinación de la solución $\tilde{\mathbf{u}}$ en cada instante de carga. Este es un resultado general que se estudia con detalle en termodinámica.

Para *sólidos deformables elásticos lineales* el siguiente resultado simplifica el cálculo del trabajo en un proceso:

Teorema 6.1.2 (Clapeyron). *El trabajo realizado por un sistema de cargas $(\tilde{\mathbf{f}}(t), \tilde{\mathbf{t}}(t))$ definidas en el intervalo $t \in [0, T]$, con $(\tilde{\mathbf{f}}(0), \tilde{\mathbf{t}}(0)) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$, sobre un cuerpo elástico lineal es*

$$W_{ext} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u} dV + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} dA, \quad (6.3)$$

siendo $\bar{\mathbf{f}} = \tilde{\mathbf{f}}(T)$, $\bar{\mathbf{t}} = \tilde{\mathbf{t}}(T)$ y $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}(T)$ el campo de desplazamiento al final del proceso de carga.

La importancia de este resultado es que, para calcular el trabajo total del proceso, sólo es necesario encontrar el desplazamiento en un estado de carga, el final. Además, revela que el trabajo externo de cualquier proceso de carga sólo depende del valor final del las fuerzas volumétricas y de superficie.

Demostración. Para demostrar este resultado supondremos que $\tilde{\mathbf{f}}(t) = p(t)\bar{\mathbf{f}}$ y $\tilde{\mathbf{t}}(t) = p(t)\bar{\mathbf{t}}$, siendo $p(t)$ una función escalar que satisface $p(0) = 0$ y $p(T) = 1$. Esta simplificación supone que todas las componentes de las fuerzas volumétricas y de superficie varían de la misma manera. Esta hipótesis

simplifica la demostración pero el mismo argumento que sigue se podría usar con factores de proporcionalidad independientes.

Si \mathbf{u} es el campo de desplazamientos cuando sobre el cuerpo actúa el sistema de fuerzas $(\bar{\mathbf{f}}, \bar{\mathbf{t}})$, en cada instante $\tilde{\mathbf{u}}(t) = p(t)\mathbf{u}$, debido a la linealidad del problema. Utilizando la definición 6.2 del trabajo se sigue que

$$\begin{aligned}
 W_{ext} &= \int_0^T \left[\int_{\Omega} p(t) \dot{p}(t) \bar{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u} \, dV + \int_{\Gamma_t} p(t) \dot{p}(t) \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} \, dA \right] dt \\
 &= \left[\int_{\Omega} \bar{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u} \, dV + \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} \, dA \right] \int_0^T p(t) \dot{p}(t) \, dt \\
 &= \left[\int_{\Omega} \bar{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u} \, dV + \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} \, dA \right] \left[\frac{p^2(t)}{2} \right]_0^T \\
 &= \left[\int_{\Omega} \bar{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u} \, dV + \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} \, dA \right] \frac{1}{2},
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

□

6.2. El principio de los trabajos virtuales

Existe un planteamiento alternativo del problema de los sólidos deformables que es muy interesante para formular aproximaciones numéricas, como se verá más adelante, para los métodos de cálculo estructural y por otras razones de índole más matemática. Esta segunda formulación es integral, o variacional, y se conoce en el campo de la mecánica de sólidos y estructuras como el principio de los trabajos virtuales, o de los desplazamientos virtuales. Para enunciar este principio consideremos dos espacios de funciones

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S} &= \{ \mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ en } \Gamma_u \}, \\
 \mathcal{W} &= \{ \mathbf{w} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_u \}.
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Es inmediato observar que el desplazamiento del cuerpo deformable ha de pertenecer al espacio \mathcal{S} , pues éste incluye todas los desplazamientos que cumplen la condición de contorno en Γ_u . El **principio de los trabajos virtuales** establece que el campo $\mathbf{u} \in \mathcal{S}$ de desplazamientos en un sólido deformable es la solución al problema mecánico si, para cualquier $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ se verifica

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \, dV = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{w} \, dV + \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{w} \, dA. \tag{6.6}$$

Como los desplazamientos \mathbf{w} no se corresponden con los reales, se llaman a menudo **desplazamientos virtuales** y, a la vista de la definición de \mathcal{W} , se pueden interpretar como desplazamientos que se superponen a la solución \mathbf{u} y que respetan las condiciones de contorno. Como además ambos términos

de la identidad 6.6 tienen dimensiones de trabajo, se puede interpretar que el término de la izquierda es el trabajo virtual de las fuerzas internas y el término de la derecha, el de las fuerzas externas.

Dada la importancia de este principio, demostramos su equivalencia con la ecuación del equilibrio de Cauchy, tal y como se planteó en el capítulo 2. Supongamos, en primer lugar, que \mathbf{u} es la solución al problema de un cuerpo deformable. Entonces, multiplicando la ecuación del equilibrio por un campo $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ cualquiera e integrando se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{f}}) \cdot \mathbf{w} \, dV \\ &= \int_{\Omega} (\bar{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{w} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla^s \mathbf{w}) \, dV + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} \, dA \end{aligned} \quad (6.7)$$

Utilizando la relación $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}$ en Γ_t y que $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ en Γ_u , se demuestra que la ecuación 6.6 es válida.

Para demostrar que el principio de los trabajos integrales implica las ecuaciones del equilibrio partimos de 6.6 e integramos por partes la integral del trabajo virtual interno, obteniendo

$$0 = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{f}}) \cdot \mathbf{w} \, dV + \int_{\Gamma_t} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \bar{\mathbf{t}}) \cdot \mathbf{w} \, dA. \quad (6.8)$$

Si escogemos una función \mathbf{w} que se anule en todo el contorno de Ω , la segunda integral tiene valor nulo, y la identidad se cumplirá sólo si $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{f}} = \mathbf{0}$. Una vez que sabemos que el primer integrando se anula, basta con escoger una función \mathbf{w} que tenga valor $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \bar{\mathbf{t}}$ sobre el contorno Γ_t para concluir que también el segundo integrando debe de anularse.

El principio de los trabajos virtuales impone de forma “variacional” o “débil” las ecuaciones de equilibrio de Cauchy. De manera análoga se pueden encontrar formas variacionales que imponen de esta manera otra u otras de las ecuaciones que forma parte del planteamiento completo del problema del cuerpo deformable. En cálculo de estructuras, por ejemplo, es habitual emplear el *principio de las fuerzas virtuales*, que es simplemente la expresión débil de la ecuación $\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u}$. Yendo más allá, se pueden construir principios variacionales más generales, en los que varias de las ecuaciones del problema del cuerpo deformable se imponen de forma débil [7, 3].

6.3. El principio de la mínima energía potencial

Cuando un sólido deformable o una estructura es sometido a solicitaciones externas éste se deforma de tal manera que una cantidad, que llamaremos la energía potencial, alcanza un valor mínimo de entre todos los que las restricciones del sólido le permiten. Este principio, que demostramos en esta sección, es tan básico como la ecuación de equilibrio de Cauchy, o el principio

de los trabajos virtuales. También, como este último, se puede considerar que este principio está en la base de algunos métodos de cálculo estructural y del *método de los elementos finitos*, el método numérico más empleado en ingeniería mecánica y estructural.

Imaginemos un sólido deformable que está sometido a cargas de volumen y superficiales, y cuyo campo de desplazamientos se indica como \mathbf{u} . Definimos la **energía potencial** del sólido bajo este campo de desplazamiento a

$$V(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} W(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \, d\Omega - \int_{\Omega} \bar{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} \, d\Gamma . \quad (6.9)$$

Pues bien, como indicábamos anteriormente, el **principio de la mínima energía potencial** establece que en el equilibrio, \mathbf{u} minimiza la energía potencial. Es decir

$$V(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{w}} V(\mathbf{w}) \quad (6.10)$$

o, empleando el cálculo variacional,

$$\delta V(\mathbf{u}) = 0 , \quad \delta^2 V(\mathbf{v}) > 0 . \quad (6.11)$$

El enunciado anterior se puede demostrar a partir de la ecuación del equilibrio de Cauchy, con lo que debiera llamarse el *teorema* de la mínima energía potencial. Sin embargo, de la misma manera, la ecuación del equilibrio de Cauchy se puede deducir del anterior principio variacional. Así pues, cuál de estas formulaciones es la básica y cuál es la derivada es una cuestión, hasta cierto punto, relativa. La equivalencia entre ambas la demostraremos posteriormente.

Es importante subrayar que la energía potencial de las fuerzas externas,

$$V_{ext}(\mathbf{u}) = - \int_{\Omega} \bar{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} \, d\Gamma \quad (6.12)$$

no es igual al trabajo de la fuerzas exteriores W_{ext} . La definición de función V_{ext} es válida en cualquier tipo de problema, incluso cuando el sólido no es elástico.

Como en la sección anterior, y dada la importancia de este segundo principio, demostramos su equivalencia con el principio de los trabajos virtuales, y por tanto con la ecuación de equilibrio de Cauchy. En primer lugar, si \mathbf{u} es el minimizador de la energía potencial, $\delta V(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, así pues, para cualquier $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \left[\int_{\Omega} W(\nabla^s(\mathbf{u} + \epsilon\mathbf{w})) \, dV - \int_{\Omega} \bar{\mathbf{f}} \cdot (\mathbf{u} + \epsilon\mathbf{w}) \, dV - \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot (\mathbf{u} + \epsilon\mathbf{w}) \, dA \right] \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\nabla^s(\mathbf{u})) \cdot \nabla^s \mathbf{w} \, dV - \int_{\Omega} \bar{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{w} \, dV - \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{w} \, dA \\ &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla^s \mathbf{w} \, dV - \int_{\Omega} \bar{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{w} \, dV - \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{w} \, dA \end{aligned} \quad (6.13)$$

que es precisamente el enunciado del principio de los trabajos virtuales. La demostración contraria es más compleja. En el caso de un material elástico la densidad de energía almacenada es $W(\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}]) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}] : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}]$ y se satisface

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}] : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}] \leq \frac{1}{2}W(\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}]) + \frac{1}{2}W(\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}]) . \quad (6.14)$$

Seleccionando en el principio de los trabajos virtuales $\mathbf{w} \leftarrow \mathbf{u} - \mathbf{w}$ se sigue

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}] : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u} - \mathbf{w}] dV = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{f}} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{w}) dV + \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{w}) dA, \quad (6.15)$$

que se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}] : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}] dV + V_{ext}(\mathbf{u}) &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}] : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{w}] dV + V_{ext}(\mathbf{w}) \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{w}] : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{w}] dV + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}] : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}] dV + V_{ext}(\mathbf{w}), \end{aligned} \quad (6.16)$$

que es equivalente a

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}] : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}] dV + V_{ext}(\mathbf{u}) \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{w}] : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{w}] dV + V_{ext}(\mathbf{w}), \quad (6.17)$$

es decir, el principio de la mínima energía potencial.

Como último comentario cabe mencionar que el principio de la mínima energía potencial no es el único problema de optimización con el que se puede expresar el problema de los cuerpos deformables. En estructuras, por ejemplo, se emplea a menudo el *principio de la mínima energía potencial complementaria*, a partir del cual se obtiene, entre otros resultados, el segundo teorema de Castigliano.

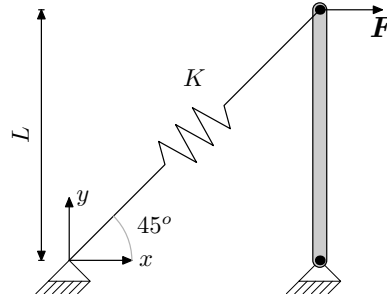


Figura 6.1: Sistema elástico del ejercicio 6.3.1

▷ **Ejemplo 6.3.1.** El sistema de la figura 6.3.1 consta de un resorte elástico de constante K y una barra rígida, unidos en un punto donde se aplica una fuerza. Calcular el desplazamiento horizontal del punto de aplicación de la fuerza empleando a) las ecuaciones de equilibrio y b) el principio de la mínima energía potencial.



Figura 6.2: James Clerk Maxwell, 1831–1879 (izquierda) y Enrico Betti, 1823–1892, (derecha).

- a) Un análisis de fuerzas en el nudo donde se unen la barra y el resorte permite deducir que la fuerza axial del resorte es $N = F\sqrt{2}$. Además, como la elongación del resorte es $\delta = N/K = F\sqrt{2}/K$ y el desplazamiento horizontal es $u = \delta\sqrt{2}$ concluimos que $u = 2F/K$.
- b) La energía potencial del sistema es

$$V(u) = \frac{1}{2}K\delta^2 - Fu = \frac{1}{2}K\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2 - Fu .$$

Encontramos el mínimo de la energía potencial resolviendo $V'(u) = 0$, cuya solución coincide con la del cálculo anterior.

◁

6.4. El teorema de reciprocidad de Maxwell-Betti

El teorema de reciprocidad de Maxwell-Betti es un resultado muy útil de aplicación en problemas elásticos únicamente. Establece lo siguiente:

Teorema 6.4.1. *Sea un cuerpo elástico sometido a dos sistemas de fuerzas que denominamos $(\bar{\mathbf{t}}^1, \bar{\mathbf{f}}^1)$ y $(\bar{\mathbf{t}}^2, \bar{\mathbf{f}}^2)$. Si sus desplazamientos, deformaciones y tensiones son, respectivamente, $(\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\varepsilon}^1, \boldsymbol{\sigma}^1)$ y $(\mathbf{u}^2, \boldsymbol{\varepsilon}^2, \boldsymbol{\sigma}^2)$, se verifica*

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{\mathbf{f}}^1 \cdot \mathbf{u}^2 \, dV + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_f} \bar{\mathbf{t}}^1 \cdot \mathbf{u}^2 \, dS = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{\mathbf{f}}^2 \cdot \mathbf{u}^1 \, dV + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_f} \bar{\mathbf{t}}^2 \cdot \mathbf{u}^1 \, dS . \quad (6.18)$$

Expresado de otra manera, el teorema de Maxwell-Betti establece que el trabajo realizado por el sistema de fuerzas $(\bar{\mathbf{t}}^1, \bar{\mathbf{f}}^1)$ sobre el campo de

desplazamientos \mathbf{u}^2 es el mismo que el trabajo realizado por el sistema de fuerzas $(\bar{\mathbf{t}}^2, \bar{\mathbf{f}}^2)$ sobre el campo de desplazamientos \mathbf{u}^1 .

Demostración. La demostración de este resultado es sencilla a partir del teorema de los trabajos virtuales. En primer lugar, para materiales elásticos lineales, se verifica que

$$\boldsymbol{\sigma}^1 : \boldsymbol{\varepsilon}^2 = (\mathbb{C}\boldsymbol{\varepsilon}^1) : \boldsymbol{\varepsilon}^2 = \boldsymbol{\varepsilon}^1 : (\mathbb{C}\boldsymbol{\varepsilon}^2) = \boldsymbol{\varepsilon}^1 : \boldsymbol{\sigma}^2 . \quad (6.19)$$

Para demostrar el teorema de Maxwell-Betti, escribimos el principio de los trabajos virtuales para el primer sistema de fuerzas

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^1 : \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, dV = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{f}}^1 \cdot \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{\Gamma_f} \bar{\mathbf{t}}^1 \cdot \delta \mathbf{u} \, dS . \quad (6.20)$$

En el principio de los trabajos virtuales podemos escoger como desplazamiento virtual el campo de desplazamiento *real* correspondiente al sistema segundo de fuerzas, con lo que obtenemos

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^1 : \boldsymbol{\varepsilon}^2 \, dV = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{f}}^1 \cdot \mathbf{u}^2 \, dV + \int_{\Gamma_f} \bar{\mathbf{t}}^1 \cdot \mathbf{u}^2 \, dS . \quad (6.21)$$

Podemos repetir este argumento cambiando los papeles de los sistemas de fuerzas y obtendremos:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^2 : \boldsymbol{\varepsilon}^1 \, dV = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{f}}^2 \cdot \mathbf{u}^1 \, dV + \int_{\Gamma_f} \bar{\mathbf{t}}^2 \cdot \mathbf{u}^1 \, dS . \quad (6.22)$$

Comparando estas dos ecuaciones y empleando el resultado (6.19) queda demostrado el teorema. \square

6.5. Los teoremas de Castigliano

Unos de los resultados más útiles en el cálculo (manual) de estructuras es el llamado *segundo teorema de Castigliano*. Este resultado, así como el primer teorema asociado a este físico y matemático italiano, sirven para calcular fuerzas y desplazamientos (generalizados) en estructuras elástica “sencillas” con un número finito de cargas y grados de libertad.

Para demostrar ambos resultados, consideremos una estructura elástica sometida a cargas (generalizadas) P_1, P_2, \dots con desplazamientos conjugados u_1, u_2, \dots . Estas cargas son cantidades escalares así que pueden interpretarse como los módulos de las cargas reales y los escalares u_i , como desplazamientos *efectivos*, es decir, proyectados sobre la dirección de sus fuerzas correspondientes. En este caso la energía potencial de la estructura puede expresarse como

$$V(\{u_i\}) = V_{int}(\{u_i\}) + V_{ext}(\{u_i\}) = V_{int}(\{u_i\}) - \sum_i P_i u_i . \quad (6.23)$$



Figura 6.3: Carlo Alberto Castigliano (1847–1884)

Cuando la estructura está en equilibrio la energía potencial es mínima y por tanto, para cada u_j ,

$$0 = \frac{\partial V}{\partial u_j}(\{u_i\}) = \frac{\partial V_{int}}{\partial u_j}(\{u_i\}) - P_j. \quad (6.24)$$

Concluimos que la fuerza generalizada P_j en el equilibrio se puede obtener como la derivada de la energía elástica con respecto a su desplazamiento generalizado asociado, es decir,

$$P_j = \frac{\partial V_{int}}{\partial u_j}(\{u_i\}). \quad (6.25)$$

Este es el *primer teorema de Castigliano*. Si $V_{int}^* = V_{int}^*(\{P_i\})$ es la transformada de Legendre de la energía elástica, es decir, la energía elástica complementaria, por las propiedades de la transformada de Legendre,

$$u_j = \frac{\partial V_{int}^*}{\partial P_j}(\{P_i\}). \quad (6.26)$$

Este resultado, que indica que el desplazamiento eficaz u_j se puede obtener derivando la energía elástica complementaria con respecto a la fuerza conjugada, es el *segundo teorema de Castigliano*.

▷ **Ejemplo 6.5.1.** Una viga en voladizo como la de la Figura 6.4, con sección de rigidez a flexión EI , tiene una energía potencial complementaria igual a

$$V_{int}^*(P) = \frac{P^2 L^3}{6 EI}. \quad (6.27)$$

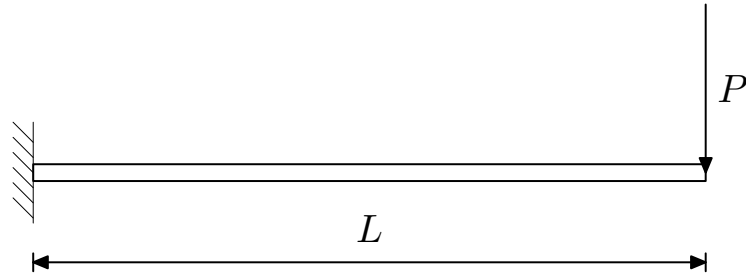


Figura 6.4: Viga en voladizo sometida a carga en su extremo.

Usando el segundo teorema de Castigliano calculamos el desplazamiento bajo la carga aplicada como

$$\delta = \frac{\partial V^*}{\partial P}(P) = \frac{PL^3}{3EI}. \quad (6.28)$$

Como la energía potencial complementaria es cuadrática, la energía interna se puede calcular de manera muy sencilla resultando

$$V_{int}(\delta) = \frac{3EI\delta^2}{2L^3}. \quad (6.29)$$

Del primer teorema de Castigliano se deduce que la fuerza necesaria para que el extremo de la viga se desplace una distancia δ es

$$P = \frac{\partial V_{int}}{\partial \delta}(\delta) = \frac{3EI}{L^3}\delta. \quad (6.30)$$

◁

Es necesario aclarar que los teoremas de Castigliano pueden emplearse también para problemas con cargas distribuidas y el medios continuos, en general. Sin embargo, en estos contextos su utilidad es más bien formal, mientras que en los sistemas con un número pequeño de grados de libertad son la herramienta más útil que existe para calcular reacciones y desplazamientos.

6.6. Termodinámica de los modelos constitutivos

En el estudio de la elasticidad se introdujo el concepto de *hiperelasticidad*, que servía para calcular la tensión como la derivada de una cierta energía elástica en función de la deformación:

$$\sigma = \frac{\partial W(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \quad (6.31)$$

Esta relación se puede generalizar a modelos constitutivos no elásticos, incluso en condiciones no isotermas de la siguiente manera. El estado de un

punto material se puede definir en función de su deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$, su temperatura θ y una serie de variables internas $\boldsymbol{\xi}$, que pueden incluir escalares, vectores o tensores. Estas variables no se pueden controlar desde el exterior sino que aparecen debido a la historia de la deformación y temperatura, pero afectan a la respuesta del material. Ejemplos de este tipo de variables incluyen la deformación plástica, el porcentaje de humedad, el daño sufrido por el material, etc, y se estudiarán con más detalle en capítulos posteriores.

La termodinámica de materiales postula que existe una *energía libre* $A = A(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\xi}, \theta)$ tal que la tensión $\boldsymbol{\sigma}$ y la densidad de entropía η en dicho punto son

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial A}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} , \quad \eta = -\frac{\partial A}{\partial \theta} . \quad (6.32)$$

Además, conjugadas con las variables internas $\boldsymbol{\xi}$, existen unas “fuerzas” que se define como

$$\boldsymbol{q} = -\frac{\partial A}{\partial \boldsymbol{\xi}} . \quad (6.33)$$

Para terminar la definición del problema, y dado que hemos introducido dos nuevas variables $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{q}$ y sólo una relación entre ellas, es necesario añadir una *ecuación cinética*, que determine cómo evoluciona $\boldsymbol{\xi}$ en función de todo el resto de variables. Escribimos esta relación cinética como

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \chi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{q}, \theta) , \quad (6.34)$$

y será responsabilidad de cada modelo el proporcionar una expresión funcional a χ de forma que se reproduzcan los fenómenos mecánicos que se quieren simular.

En este curso nos centramos en los modelos isoterms. Para éstos se puede demostrar que el segundo principio de la termodinámica requiere que la cinética de las variables internas satisfagan:

$$\boldsymbol{q} \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}} \geq 0 \quad (6.35)$$

en todo punto e instante. Evidentemente, el modelo elástico satisface esta desigualdad puesto que no tiene ninguna variable interna. Los modelos más complejos que definiremos en los capítulos siguientes habrán de verificarla, guiando este requisito la definición de las leyes cinéticas y las energías internas.

▷ **Ejemplo 6.6.1.** La energía libre del modelo de termoelasticidad lineal estudiado en el capítulo 4 es

$$A(\boldsymbol{\varepsilon}, \theta) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} \boldsymbol{\varepsilon} - 3\kappa\alpha\theta \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) - \frac{c}{2\Theta_o} \theta^2 , \quad (6.36)$$

siendo c la capacidad térmica, Θ_o una temperatura de referencia, θ el salto térmico desde la temperatura de referencia (no confundir con la deformación

volumétrica). Para esta función de energía libre se satisface

$$\sigma = \frac{\partial A}{\partial \varepsilon} = \mathbb{C}\varepsilon - 3\kappa\alpha\theta\mathbf{I}, \quad \eta = -\frac{\partial A}{\partial \theta} = 3\kappa\alpha \operatorname{tr}(\varepsilon) + \frac{c}{\Theta_o}\theta.$$

◁

6.7. Métodos numéricos

Una de las razones por las cuales es importante la formulación variacional de la mecánica de sólidos es porque es a partir de ésta como se formulan los métodos numéricos más empleados en la actualidad para resolver aproximadamente problemas mecánicos. En particular, el **método de los elementos finitos** se basa en los principios variacionales presentados en este capítulo o en otros más avanzados que se pueden consultar en la literatura [3].

Se puede decir que el método de los elementos finitos se descubrió de forma independiente por matemáticos e ingenieros. En 1942 Courant propuso por primera vez un método variacional que servía para aproximar la solución de problemas de equilibrio y vibración ([2]). Fue más tarde cuando ingenieros aeronáuticos propusieron un método para analizar estructuras, sentando las bases de lo que hoy se conoce como el método de los elementos finitos ([6]). En este trabajo inicial se utilizaba en método de la rigidez (que se aplica para la resolución de estructuras) a problemas bidimensionales, de una forma novedosa.

En esencia, el método de los elementos finitos se puede describir como una metodología para encontrar de forma “sencilla” funciones que convergen hacia el minimizador de la energía potencial. En vez de buscar esta función entre todas las aceptables (las que son suficientemente diferenciables), el método de los elementos finitos propone la construcción de espacios de funciones sencillas y la resolución del problema de minimización en estos subespacios. La idea de reemplazar el espacio de soluciones por un espacio más pequeño se conoce como el **método de Ritz**. La novedad del método de los elementos finitos es que propone que el subespacio donde se busca la solución esté compuesto de funciones polinómicas a trozos, combinaciones lineales de otras muy sencillas y de soporte compacto.

6.7.1. El método de Ritz

La solución del problema mecánico en un sólido deformable es la función \mathbf{u} que, perteneciendo a $\mathcal{S} = \{\mathbf{w} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_u\}$, minimiza la energía potencial del sistema, como se indica en (6.10). Este problema de optimización es, en la mayoría de los casos, muy complejo. El **método de Ritz** propone definir un espacio de funciones más pequeño que \mathcal{S} , donde sea más fácil encontrar el minimizador correspondiente. En concreto, se define

un espacio de funciones $\mathcal{S}^h \subset \mathcal{S}$ de la forma

$$\mathcal{S}^h = \left\{ \mathbf{w}^h \in \mathcal{S}, \mathbf{w}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \phi_i^h(\mathbf{x}) \mathbf{w}_i \right\}, \quad (6.37)$$

con lo que la dimensión de \mathcal{S}^h es N , que es finita, en contraposición a la dimensión de \mathcal{S} , que es infinita. Las funciones escalares ϕ_i^h son acompañan a la definición del espacio \mathcal{S}^h y por lo tanto son conocidas. El método de Ritz consiste en encontrar la función $\mathbf{u}^h \in \mathcal{S}^h$ tal que

$$V(\mathbf{u}^h) = \min_{\mathbf{w}^h \in \mathcal{S}^h} V(\mathbf{w}^h). \quad (6.38)$$

Para encontrar el minimizador \mathbf{u}^h basta con expresar la energía potencial $V(\mathbf{u}^h) = V(\sum_i \phi_i^h \mathbf{u}_i)$. Las incógnitas son únicamente los valores \mathbf{u}_i y, suponiendo que la energía potencial sea una función diferenciable, encontrar éstas resolviendo las N ecuaciones vectoriales (es decir, $3N$ ecuaciones escalares)

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{u}_j} \left(\sum_i \phi_i^h(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i \right) = \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (6.39)$$

Después de algunas operaciones algebraicas, la ecuación anterior se puede reescribir como

$$\mathbf{0} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \text{grad} \phi_j^h - \int_{\Omega} \bar{\mathbf{f}} \phi_j^h dV - \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \phi_j^h dA. \quad (6.40)$$

Esta ecuación se puede reformular de forma más útil pero requiere ciertas operaciones tensoriales que son algo complejas en el caso general [5]. Por simplificar, nos ceñiremos al caso de la elasticidad isótropa, para la cual se puede escribir

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \text{grad} \phi_j^h &= \lambda \text{div} \mathbf{u}^h \text{grad} \phi_j^h + 2\mu \frac{1}{2} \text{grad}^s \mathbf{u}^h \text{grad} \phi_j^h \\ &= \lambda \left(\sum_{i=1}^N \text{grad} \phi_i^h \cdot \mathbf{u}_i \right) \text{grad} \phi_j^h + \mu \sum_{i=1}^N \left(\mathbf{u}_i \otimes \text{grad} \phi_i^h + \text{grad} \phi_i^h \otimes \mathbf{u}_i \right) \text{grad} \phi_j^h \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\lambda \text{grad} \phi_j^h \otimes \text{grad} \phi_i^h + \mu \left((\text{grad} \phi_j^h \cdot \text{grad} \phi_i^h) \mathbf{I} + \text{grad} \phi_i^h \otimes \text{grad} \phi_j^h \right) \right) \mathbf{u}_i. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Con esta identidad, la relación (6.40) se puede re-escribir como

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{K}_{ji} \mathbf{u}_i = \mathbf{F}_j \quad (6.42)$$

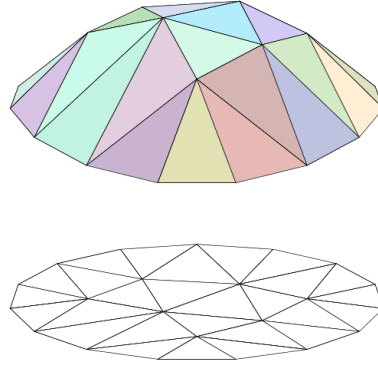


Figura 6.5: Función polinómica (afín) a trozos (wikipedia).

siendo

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ji} &= \int_{\Omega} \lambda \text{grad} \phi_j^h \otimes \text{grad} \phi_i^h + \mu \left((\text{grad} \phi_j^h \cdot \text{grad} \phi_i^h) \mathbf{I} + \text{grad} \phi_i^h \otimes \text{grad} \phi_j^h \right) dV \\ \mathbf{F}_j &= \int_{\Omega} \bar{\mathbf{f}} \phi_j^h dV + \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \phi_j^h dA. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Las N ecuaciones de la forma (6.42) definen un sistema *lineal* de $3N \times 3N$ ecuaciones

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \dots & \mathbf{K}_{1N} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \dots & \mathbf{K}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_{N1} & \mathbf{K}_{N2} & \dots & \mathbf{K}_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_N \end{Bmatrix} \quad (6.44)$$

donde la matrix se conoce con el nombre de **matriz de rigidez** y el vector de datos es el **vector de fuerzas externas**. Una vez resuelto este sistema y encontradas las incógnitas \mathbf{u}_i , la solución \mathbf{u}^h puede ser reconstruida, proporcionando una aproximación a la solución exacta \mathbf{u} .

6.7.2. El método de los elementos finitos

El método de Ritz sirve para aproximar la solución de cualquier problema de minimización, no sólo en mecánica de sólidos, con aplicaciones desde la optimización a la mecánica cuántica. Aunque, excepto en casos muy sencillos, no proporciona la solución exacta, el método calcula *la mejor solución posible*, dentro del espacio de búsqueda, por lo que es muy importante una elección acertada de este último. Para ello se han utilizado espacios de solución más o menos útiles y sencillos de calcular: polinomios, funciones seno-oidales, funciones tipo “campana de Gauss”, etc. Entre todos ellos, y dado que la forma de la solución no se conoce a priori, destacan aquellos en el

que el cálculo de las matrices K_{ji} y los vectores F_j es sencilla y da lugar a sistemas de ecuaciones lineales “fáciles” de resolver.

El método que más éxito ha tenido en las diversas ramas de la ingeniería mecánica es el **método de los elementos finitos**. Este es un tipo de método de Ritz en el que el espacio de solución lo componen funciones *polinómicas a trozos de soporte compacto*, esto es, funciones que son nulas excepto en una pequeña región del sólido y, en ésta, son polinómicas a trozos.

Los “trozos” o regiones donde estas funciones son polinómicas se denominan **elementos** (que suelen ser tetraedros, hexaedros o prismas) y los vértices de la triangulación que resulta, **nodos**. El conjunto de elementos y nodos, con su conectividad y topología se conoce con el nombre de **mall**.

Las ventajas de las funciones de interpolación empleadas en el método de los elementos finitos son fundamentalmente dos: en primer lugar, por ser polinómicas son muy fáciles de calcular y sus integrales también; en segundo lugar, por ser no nulas únicamente en una pequeña parte del dominio analizado, el sistema de ecuaciones lineales tiene una matriz **dispersa**, es decir, con muchos ceros, que permite una resolución muy eficiente mediante ordenador. Es habitual, además, que las funciones de interpolación ϕ_i^h que se emplean tomen el valor 1 en el nodo i -ésimo y 0 en todos los demás, con lo que los coeficientes (incógnita) u_i adquieren el significado del desplazamiento en el nodo i .

▷ **Ejemplo 6.7.1.** Vamos a emplear el método de los elementos finitos para encontrar una solución aproximada al campo de desplazamientos en el sólido de la figura 6.6. Nótese que este cuerpo no está en un estado de tracción pura debido a las condiciones de contorno en su base y a las fuerzas volumétricas. Las primeras impiden su desplazamiento tanto vertical como horizontal en la base y las segundas obligan a que el tensor de tensiones cambie de punto a punto.

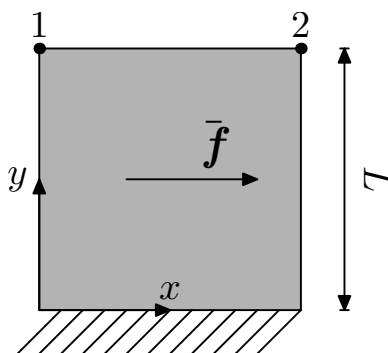


Figura 6.6: Bloque cuadrado en deformación plana, sometido a fuerzas distribuidas \bar{f} . Las constantes de Lamé del cuerpo son λ y μ .

Utilizaremos una solución de elementos finitos con un solo elemento, que

coincide con el cuadrado de la figura. Para empezar, definimos el espacio de funciones como

$$\mathcal{V}^h = \left\{ \mathbf{w}^h(\mathbf{x}) = \phi_1^h(\mathbf{x})\mathbf{w}_1 + \phi_2^h(\mathbf{x})\mathbf{w}_2 \right\},$$

siendo

$$\phi_1^h(\mathbf{x}) = \frac{y(L-x)}{L^2}, \quad \phi_2^h(\mathbf{x}) = \frac{xy}{L^2}.$$

La primera función tiene la propiedad de valer 1 en el nodo 1 y 0 en el nodo 2, y la segunda al contrario. Para calcular la matrices \mathbf{K}_{ji} , calculamos los gradientes

$$\{\text{grad}\phi_1^h\} = \left\{ \begin{array}{c} -y/L^2 \\ (L-x)/L^2 \end{array} \right\}, \quad \{\text{grad}\phi_2^h\} = \left\{ \begin{array}{c} y/L^2 \\ x/L^2 \end{array} \right\}.$$

Empleando las expresiones (6.43), obtenemos, después de cálculos algo laboriosos:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{11} &= \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{3} + \mu & \frac{1}{4}(-\lambda - \mu) \\ \frac{1}{4}(-\lambda - \mu) & \frac{\lambda}{3} + \mu \end{bmatrix}, & \mathbf{K}_{12} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{6}(-2\lambda - 3\mu) & \frac{\mu - \lambda}{4} \\ \frac{\lambda - \mu}{4} & \frac{\lambda}{6} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}_{21} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{6}(-2\lambda - 3\mu) & \frac{\lambda - \mu}{4} \\ \frac{\mu - \lambda}{4} & \frac{\lambda}{6} \end{bmatrix}, & \mathbf{K}_{22} &= \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{3} + \mu & \frac{\lambda + \mu}{4} \\ \frac{\lambda + \mu}{4} & \frac{\lambda}{3} + \mu \end{bmatrix}, \\ \mathbf{F}_1 &= \left\{ \begin{array}{c} \frac{fL^2}{4} \\ 0 \end{array} \right\}, & \mathbf{F}_2 &= \left\{ \begin{array}{c} \frac{fL^2}{4} \\ 0 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

La resolución del sistema de ecuaciones (6.42) requiere construir una única matriz de rigidez \mathbf{K} y un único vector de fuerzas \mathbf{F} , colocando los bloques recién obtenidos. Suponiendo, por simplificar, que las constantes λ, μ, L y f tienen todas ellas valor unidad, se sigue que

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{6} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{6} & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{array} \right\},$$

y que por lo tanto los valores nodales del desplazamiento sean

$$\{\mathbf{u}_1\} = \left\{ \begin{array}{c} 7/8 \\ 3/8 \end{array} \right\}, \quad \{\mathbf{u}_2\} = \left\{ \begin{array}{c} 7/8 \\ -3/8 \end{array} \right\}.$$

Concluimos que la aproximación por elementos finitos del campo vectorial en el cuadrado de la figura es, para el caso de las constantes escogidas,

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \left[\frac{7}{8}y(1-x) + \frac{7}{8}xy \right] \mathbf{i} + \left[\frac{3}{8}y(1-x) - \frac{3}{8}xy \right] \mathbf{j}.$$

◁

Aunque la solución obtenida en el ejemplo anterior es una solución de elementos finitos, hay que indicar que en la práctica la resolución de problemas con este método sigue un camino ligeramente distinto y más general, para poder emplear elementos irregulares y de cualquier tamaño, donde las integrales necesarias para calcular las matrices de rigidez y vectores de fuerza no se pueden obtener analíticamente.

Problemas

6.1. Se consideran dos muelles elásticos de constantes k_1, k_2 siendo el primero más rígido que el segundo. Ambos muelles tiene un extremo sujeto y el otro libre.

- a) Si se aplica una fuerza de tracción F igual a ambos muelles, ¿Cuál almacena más energía elástica?
- b) Si el extremo libre de cada uno de los muelles se desplaza una distancia Δ , ¿cuál almacena más energía elástica?
- c) ¿Cómo se almacena más energía elástica en un muelle, sometiéndolo a una fuerza de tracción o a una de compresión? (iguales en módulo).
- d) ¿Cómo colocarías los muelles (en serie o en paralelo) para que almacenaran la mayor cantidad posible de energía cuando se aplica una única fuerza F en el extremo libre? ¿Y si se aplica un desplazamiento sobre el extremo libre?

6.2. Demuestra que la energía elástica complementaria almacenada en un cuerpo homogéneo sometido a una presión hidrostática uniforme p es

$$W^* = \frac{V}{2K} p^2,$$

siendo κ la rigidez volumétrica del material y V el volumen del cuerpo.

6.3. Considera un paralelepípedo de lados L_x, L_y, L_z paralelos a los ejes coordenados. Si las caras perpendiculares al eje x están sometidas a una fuerza por unidad de superficie de valor σ , demuestra que la energía de deformación del paralelepípedo es

$$W_{int} = \frac{1}{2} K \delta^2,$$

siendo $K = EA/L_x$, $A = L_y \cdot L_z$ y $\delta = \sigma A/K$.

6.4. Una barra recta de sección constante A y material elástico con módulo de Young E está alineada con el eje x . En el extremo correspondiente a

$x = 0$, la barra está sujeta, y en el extremo opuesto $x = L$, la barra está sometida a una fuerza F . Además, existe una fuerza distribuida por unidad de longitud sobre toda la barra y de valor $f(x)$.

Se define el conjunto de funciones $\mathcal{V} = \{v : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}, v(0) = 0\}$. Demostrar que si $u \in \mathcal{V}$ satisface

$$\int_0^L N \cdot v' dx = \int_0^L f \cdot v dx + F \cdot v(L),$$

para todo $v \in \mathcal{V}$, entonces u satisface la ecuación del equilibrio de barras elásticas, a saber,

$$(EAu')' + f = 0$$

siendo $N = EA u'$ y $(\cdot)' = \frac{d}{dx}(\cdot)$

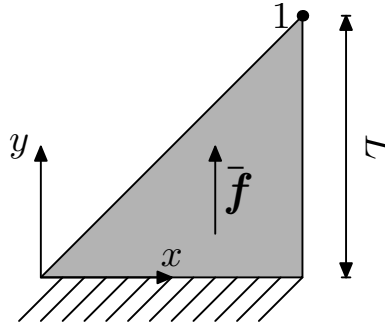


Figura 6.7: Triángulo isósceles en deformación plana, sometido a fuerzas volumétricas \bar{f} .

6.5. Encuentra la solución de elementos finitos al problema de deformación plana de la figura 6.7, empleando como única incógnita el desplazamiento u_1 en el nodo 1 y como función de interpolación

$$\phi_1^h(\mathbf{x}) = \frac{y}{L}.$$

6.6. *Demuestrar la relación

$$\frac{1}{V} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{V} \int_{\Gamma} \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{t}} \otimes \mathbf{x} + \mathbf{x} \otimes \bar{\mathbf{t}}) dA.$$

(Emplear el principio de los trabajos virtuales con un desplazamiento virtual $\mathbf{w} = \mathbf{S}\mathbf{x}$, siendo \mathbf{S} un tensor simétrico cualquiera)

6.7. Un resorte elástico tiene una relación fuerza/alargamiento que es no lineal y de la forma

$$F = k \delta^3,$$

siendo k una constante. Calcular el trabajo que se realiza en un ciclo de carga en el que F es cero inicialmente y aumenta hasta alcanzar un valor máximo $F_{\text{máx}}$.

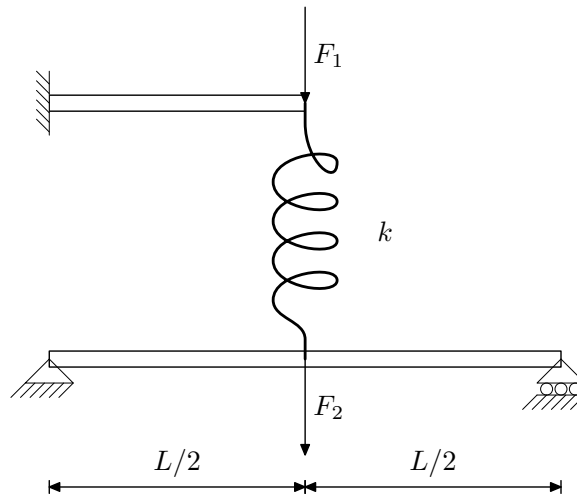


Figura 6.8: Estructural del problema 6.8.

6.8. La estructural de la figura 6.8 está sometida a fuerzas F_1 y F_2 . Se sabe que la energía elástica de una viga en voladizo de longitud L , sección de rigidez EI , sometida a un desplazamiento en su extremo libre de valor δ es

$$V_{int}(\delta) = \frac{3EI}{2L^3} \delta^2. \quad (6.45)$$

Además, se conoce que la energía elástica de una viga biapoyada de longitud L , rigidez EI y con un desplazamiento vertical δ en el centro de vano es

$$V_{int}(\delta) = \frac{EI}{24L^3} \delta^2. \quad (6.46)$$

Si el muelle de la figura tiene constante $k = EI/L^3$, encontrar los desplazamientos verticales en los puntos de aplicación de las cargas utilizando el teorema de la mínima energía potencial.

6.9. Una viga biapoyada está sometida a una carga distribuida vertical hacia abajo de valor

$$q(x) = \bar{q} \sin \left(\pi \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right), \quad (6.47)$$

siendo \bar{q} una constante, L su longitud y x la coordenada de valor 0 en su extremo izquierdo y L en su extremo derecho. Encontrar, empleando el método de Ritz, la mejor aproximación de la elástica de la forma $v(x) = \alpha x(L-x)$ sabiendo que la energía en flexión de una viga como la descrita es

$$V = \int_0^L \frac{EI}{2} (v''(x))^2 dx - \int_0^L q(x) \cdot v(x) dx, \quad (6.48)$$

donde EI es la rigidez a flexión de la sección transversal de la viga.

Bibliografía

- [1] R D Cook. *Finite element modeling for stress analysis*. John Wiley & Sons, 1995.
- [2] R Courant. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Transactions of the American Mathematical Society*, pages 1–23, 1942.
- [3] K D Hjelmstad. *Structural mechanics*. Springer Science+Business Media, second edition, 2005.
- [4] T J R Hughes. *The finite element method*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1987.
- [5] J Planas, I Romero, and J M Sancho. B free. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 217-220:226–235, 2012.
- [6] M. Turner, R W Clough, H C Martin, and L J Topp. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *Journal of Aeronautical Sciences*, 23(9):805–823, 1956.
- [7] Kyūichirō Washizu. *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. Pergamon, 1982.

Apéndice A

Coordenadas cilíndricas

Se recogen a continuación los principales resultados de cálculo vectorial y tensorial en coordenadas cilíndricas. Para ello, se considera un sistema de coordenadas cilíndrico (r, θ, z) .

A.1. Operador gradiente

Si f es una campo escalar diferenciable, su gradient en coordenadas cilíndricas es:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z. \quad (\text{A.1})$$

A.2. Operador divergencia

Si $\mathbf{v} = \mathbf{v}(r, \theta, z)$ es un campo vectorial con componentes v_r, v_θ, v_z , su divergencia es el campo escalar

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (\text{A.2})$$

Si $\mathbf{T} = \mathbf{T}(r, \theta, z)$ es un campo tensorial con componentes $T_{rr}, T_{r\theta}, \dots$, su divergencia es el campo vectorial

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T} = & \left(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial \theta} + (T_{rr} - T_{\theta\theta}) \right) + \frac{\partial T_{zr}}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r \\ & + \left(\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + (T_{r\theta} + T_{\theta r}) \right) + \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\theta \\ & + \left(\frac{\partial T_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_{\theta z}}{\partial \theta} + T_{rz} \right) + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \right) \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

A.3. Deformación infinitesimal.

El cálculo de las componentes del tensor de deformación infinitesimal en un sistema de coordenadas no cartesiano conlleva complicaciones que

no estudiamos ahora. Resumiendo el resultado principal, en un sistema de coordenadas cilíndrico (r, θ, z) , el tensor ε tiene por expresión matricial:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} u_{r,r} & \frac{1}{2} \left(\frac{u_{r,\theta}}{r} + u_{\theta,r} - \frac{u_{\theta}}{r} \right) & \frac{1}{2} (u_{r,z} + u_{z,r}) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{u_{r,\theta}}{r} + u_{\theta,r} - \frac{u_{\theta}}{r} \right) & \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta,\theta}}{r} & \frac{1}{2} \left(\frac{u_{z,\theta}}{r} + u_{\theta,z} \right) \\ \frac{1}{2} (u_{r,z} + u_{z,r}) & \frac{1}{2} \left(\frac{u_{z,\theta}}{r} + u_{\theta,z} \right) & u_{z,z} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$