

## Capítulo 9

# Mecánica de la fractura

La razón definitiva por la que una pieza o estructura falla no es por la superación de un límite elástico en un punto o región, sino por la aparición y propagación de grietas que, en última instancia, llevan a la fragmentación de ésta y a la pérdida completa de su capacidad resistente. El estudio de la nucleación y propagación de grietas es complejo, pero necesario para identificar de forma definitiva la capacidad mecánica de un cuerpo. A diferencia del estudio de la elasticidad, la predicción de la aparición de grietas y el cálculo explícito de su crecimiento no se comprende del todo y sigue siendo tema de investigación.

El estudio de la propagación de grietas ya existentes es el objeto de la *mecánica de la fractura*. Un primera dificultad que aparece en el cálculo de la propagación de grietas es que la resistencia a ésta no es una propiedad del material sino, como se explicará en este capítulo, una combinación de propiedades materiales con factores geométricos y de las cargas. De hecho, el fenómeno de la fractura tiene mucho que ver con el de pandeo, pues es una inestabilidad en la capacidad resistente de una pieza. Para simplificar el cálculo, la mecánica de la fractura siempre tomará como punto de partida la existencia de una o más grietas en el sólido. Esta además no es una hipótesis descabellada, puesto que las piezas que se emplean habitualmente en ingeniería tienen todas ellas grietas o defectos de algún tipo. Las preguntas básicas que se desea responder es *i)* ¿cuál es la carga máxima que una estructura o un elemento de máquinas puede resistir si tiene una grieta o un defecto?, *ii)* ¿cuál es el tamaño máximo de grieta que puede haber en un sólido en tensión para que ésta no se propague?. La respuesta a ambas preguntas afecta a la forma de calcular e inspeccionar las estructuras y máquinas.

El enfoque tradicional de la mecánica de la fractura es *fenomenológico*: en lugar de intentar describir exactamente qué es lo que ocurre en la grieta, se emplean modelos para ajustar resultados experimentales. Aunque muy extendidos, este tipo de modelos deben emplearse teniendo en cuenta

las simplificaciones bajo las cuales son válidos. En realidad, el análisis del crecimiento de grietas con fundamentación física requeriría el estudio de las fuerzas entre los átomos que se encuentran en la llamada punta de grieta. La complejidad de este tipo de cálculo justifica por tanto el uso de modelos aproximados. Dentro de éstos, este capítulo presenta una introducción a la teoría que se conoce con el nombre de *mecánica de la fractura elástica lineal*. Esta supone que todo el material de la pieza en estudio tiene un comportamiento elástico lineal, y fue desarrollada desde principios del siglo XX hasta 1960, aproximadamente. Desde ese momento se empezaron a estudiar extensiones de la teoría elástica lineal que tuvieran en cuenta la plasticidad o viscoplasticidad del material, pero no se tratan en esta introducción. Nos remitimos a libros más avanzados donde estos modelos más modernos se tratan con detalle (por ejemplo, [1]).

Dentro de la mecánica de la fractura clásica se distinguen dos enfoques diferentes para el estudio de la resistencia y el fallo de los materiales. El primero, *energético*, estudia el cambio de la energía potencial cuando las grietas se abren, utilizando el principio de la minimización de la energía potencial como forma de averiguar el tamaño de las grietas para tensiones dadas. El segundo enfoque es completamente *local*, y se basa en examinar las tensiones en la punta de grieta y comparar éstas con valores conocidos del material.

Cuando se diseña una pieza para resistir tensiones (por ejemplo, para no superar el límite elástico según un cierto criterio de fallo) el procedimiento a seguir consiste en calcular las tensiones máximas, que dependen de las cargas, la geometría y el material, y compararla con dicho valor admisible. La filosofía en mecánica de la fractura es similar, pero el valor de la tensión que calculamos depende no sólo, como en el caso anterior, de las cargas, la geometría y el material, sino también de la longitud de la grieta. Esta nueva dependencia apunta hacia un concepto fundamental en mecánica de la fractura: el llamado *efecto tamaño*. En esta disciplina se podrá comprobar que la resistencia de los cuerpos no escala de la misma manera que en elasticidad, plasticidad u otros modelos del continuo.

## 9.1. Modos de fractura

Dadas dos superficies correspondientes a la fractura de un cuerpo deformable, ésta se puede propagar desplazando una superficie relativamente a la otra. Este desplazamiento relativo puede descomponerse en tres direcciones: la dirección del fondo de grieta, la dirección normal a las superficies de la grieta y la tercera dirección ortogonal. Si el desplazamiento relativo de una superficie frente a la otra es según una de esas tres direcciones, se dice que la grieta se abre en el modo I, II ó III (ver figura 9.1).

En realidad, las grietas se abren con desplazamientos relativos que re-

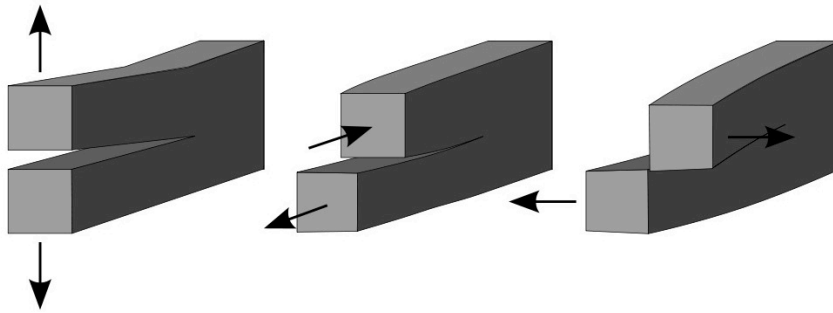


Figura 9.1: Los tres modos de fractura (Wikipedia). Modo I, apertura, a la izquierda; modo II, cortante, en el centro; modo III, rasgado, a la derecha.

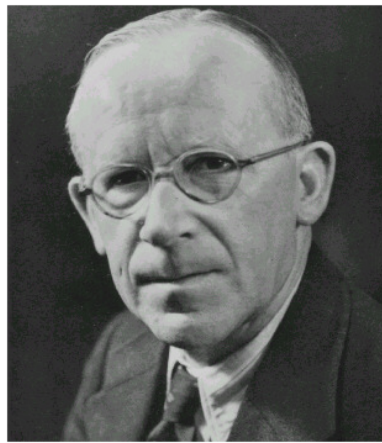


Figura 9.2: Alan Arnold Griffith (1893–1963).

sultan de la combinación de dos o más modos, aunque resulta instructivo centrarse primero en cada uno de ellos para estudiarlos independientemente.

## 9.2. Enfoque energético de la mecánica de la fractura

Cuando se calcula el valor teórico de la tensión necesaria para abrir una grieta en una pieza éste resulta mucho más elevado que el que se observa en la práctica. Partiendo de esta observación Griffith [2] en 1921 propuso que siempre se debía de suponer que existen grietas o defectos en los sólidos, aunque éstos fueran muy pequeños, y que la fractura era por tanto el resultado de su crecimiento o propagación. El trabajo citado se toma como el comienzo de la mecánica de la fractura.

Para presentar la teoría de Griffith se supondrá que el comportamiento del material en todo punto e instante es elástico lineal y que las deforma-

ciones siempre son pequeñas. La idea básica de esta teoría es que una grieta se propaga si la energía potencial *del cuerpo* disminuye al avanzar ésta. Para determinar por tanto el valor crítico del tamaño de grieta es necesario evaluar la energía potencial en función de los parámetros geométricos de la pieza fisurada. Además, para simplificar los cálculos se supondrá conocido el camino por donde la grieta se propagará.

Supongamos que existe un parámetro propio de cada material que indicamos como  $\gamma$  y que cuantifica la energía, por unidad de área, necesaria para abrir una grieta. Además, también suponiendo conocida la trayectoria de la grieta, definimos como  $S$  la superficie creada por la grieta, en cada instante. La teoría de Griffith comienza postulando que la energía potencial del cuerpo  $V$  tiene tres contribuciones:

$$V(\mathbf{u}, S) = V_{int}(\mathbf{u}, S) + V_{ext}(\mathbf{u}, S) + V_{gr}(S) . \quad (9.1)$$

La primera,  $V_{int}$  se corresponde con la energía elástica almacenada en el cuerpo; la segunda,  $V_{ext}$  es la energía de las fuerzas externas (volumétricas y de superficie); por último,  $V_{gr}(S) = S\gamma$ , es la energía de la superficie creada por la grieta. En las tres expresiones, por sencillez, hemos supuesto que la grieta viene parametrizada por un único escalar  $S$ , lo cual indica que se supone conocido en todo momento la forma de ésta en función de su superficie total. Esto en realidad nunca es así pero simplifica la exposición que sigue.

Supongamos que el sólido deformable tiene una grieta de longitud  $S_0$ . Cuando éste se somete a una cargas exteriores, se deforma para intentar minimizar su energía. Además, si con ello reduce su energía potencial, hace que la grieta crezca. Como las grietas no se pueden eliminar, el sólido intenta minimizar su energía potencial considerando todas las grietas más largas o iguales a actual, pero no las más cortas. Así pues, para las cargas conocidas, el sólido busca la pareja  $\mathbf{u}, S$ , con  $S \geq S_0$  que minimizan  $V$ .

Si el cuerpo sin deformar tiene un grieta, como se indicaba anteriormente, de longitud  $S_0$ , y se somete a cargas, el crecimiento de la grieta se determina al estudiar el balance energético que resulta de hacer crecer ésta (disminuyendo  $V_{int} + V_{ext}$ ) y el coste de crear nuevas superficies (incrementando  $V_{gr}$ ). Si la grieta es pequeña, el coste de crear nueva área es mayor que el beneficio de hacer el cuerpo más flexible. Estas situaciones se caracterizan por

$$\delta_{\mathbf{u}}V(\mathbf{u}, S_0) = 0, \quad \frac{\partial V(\mathbf{u}, S_0)}{\partial S} > 0 . \quad (9.2)$$

Sin embargo, al aumentar las cargas, se alcanza una situación en la que el crecimiento de grieta empieza a ser energéticamente favorable. En el instante anterior a que el crecimiento de grieta disminuya la energía potencial total ocurre que

$$\delta_{\mathbf{u}}V(\mathbf{u}, S_0) = 0, \quad \frac{\partial V(\mathbf{u}, S_0)}{\partial S} = 0 , \quad (9.3)$$

y por tanto se puede considerar como que ésta es la condición que caracteriza el comienzo del crecimiento de grieta. La segunda de estas ecuaciones también se puede escribir como

$$G(\mathbf{u}, S_0) = G_c , \quad (9.4)$$

siendo  $G$  una función del sólido y  $G_c$  una propiedad del material definidas respectivamente como

$$G(\mathbf{u}, S) = -\frac{\partial V_{int}}{\partial S}(\mathbf{u}, S) - \frac{\partial V_{ext}}{\partial S}(\mathbf{u}, S) , \quad G_c = \frac{\partial V_{gr}}{\partial S}(S) . \quad (9.5)$$

La función  $G$ , conocida como la **tasa de energía disponible por unidad de área**, es la cantidad de energía que se *libera* por cada unidad de área abierta por la grieta y depende de la geometría, de la energía interna y de las sollicitaciones externas (tanto fuerzas como desplazamientos impuestos). La propiedad  $G_c$  se conoce como la **tenacidad** del material, y existen varios métodos experimentales para medirla. El objeto de la mecánica de la fractura es, de forma simplificada, el cálculo de  $G$  para distintos sólidos y la medida de  $G_c$  para distintos materiales.

El enfoque energético supone que la respuesta del material en todos sus puntos es elástica y esto no puede ser cierto en la punta de la grieta, donde la concentración de tensiones hace que éstas sean localmente muy altas, superando posiblemente el límite elástico. El enfoque de Griffith es por tanto válido si la zona donde las tensiones son altas (la llamada zona de proceso) es pequeña y la contribución energética de la deformación en ella es pequeña. Esto es bastante cierto en el caso de los materiales frágiles, donde el éxito de este enfoque fue rápidamente reconocido.

▷ **Ejemplo 9.2.1.** Un muelle elástico tiene una fisura cuyo tamaño modifica el valor de la rigidez del mismo. Si la medida adimensional del área de la fisura se indica como  $a \in [0, 1]$ , se sabe que la energía elástica del muelle es

$$V_{int}(u, a) = \frac{1}{2}k(1 - a^3)\delta^2 ,$$

siendo  $k$  una constante y  $\delta$  la elongación del muelle. Si el muelle está sometido a una fuerza  $F$  y tiene una energía de fractura

$$V_{gr}(a) = 2\gamma a,$$

con  $\gamma$  constante, la expresión completa de la energía potencial es

$$V(\delta, a) = \frac{1}{2}k(1 - a^3)\delta^2 - F\delta + 2\gamma a . \quad (9.6)$$

La figura 9.3 muestra las curvas de nivel de la energía potencial como función de  $\delta$  y  $a$ . Para cada valor de longitud de grieta  $a$ , la elongación del muelle se obtiene imponiendo que la energía potencial es mínima, es decir

$$\delta = \arg \min_x V(x, a) .$$

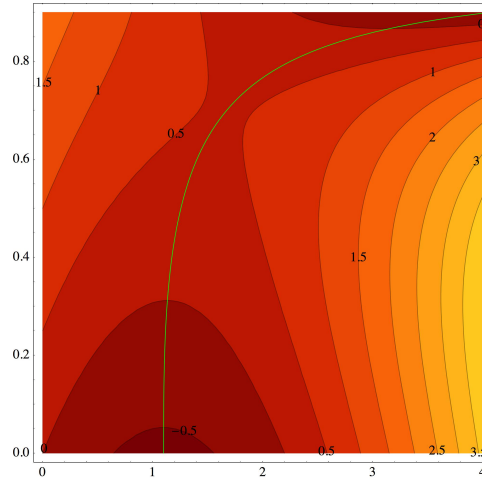


Figura 9.3: Contornos de nivel de la función 9.6. Eje de abscisas: elongación  $\delta$ ; eje de ordenadas  $a$ . La curva central indica el valor de  $\delta$  que minimiza  $V$  para cada valor de  $a$ . (Datos:  $k = 1, F = 1, \gamma = 1$ )

Para encontrar este valor resolvemos

$$\frac{\partial V(\delta, a)}{\partial \delta} = 0, \quad (9.7)$$

y obtenemos que

$$\delta = \frac{F}{k(1 - a^3)}, \quad (9.8)$$

por lo que el valor de la energía potencial para cada valor de longitud de grieta  $a$  se obtiene sustituyendo (9.8) en (9.6), resultando

$$\hat{V}(a) = V(\delta(a), a) = -\frac{1}{2} \frac{F^2}{k(1 - a^3)} + 2a\gamma.$$

El valor de  $\delta$  que minimiza  $V(\delta, a)$ , para cada  $a$ , define una curva  $(\delta(a), a)$  que se muestra en la figura 9.3. La función  $\hat{V}(a)$  se dibuja en la figura 9.4.

Como se puede apreciar en la figura 9.4, cuando la apertura de grieta es pequeña, si ésta crece, la energía potencial también lo hace. El sistema por tanto no tiene tendencia a hacer crecer la grieta. Existe un valor, sin embargo, a partir del cual si la grieta crece, la energía potencial disminuye. Este es el valor crítico de longitud de grieta puesto que, si se alcanza, el sistema deformable favorecerá el crecimiento de grieta, que continuará hasta que la grieta alcance su valor máximo.

El valor crítico de longitud de grieta se obtiene por tanto maximizando  $\hat{V}(a)$ , es decir, resolviendo la ecuación

$$\frac{d\hat{V}(a)}{da} = 0.$$

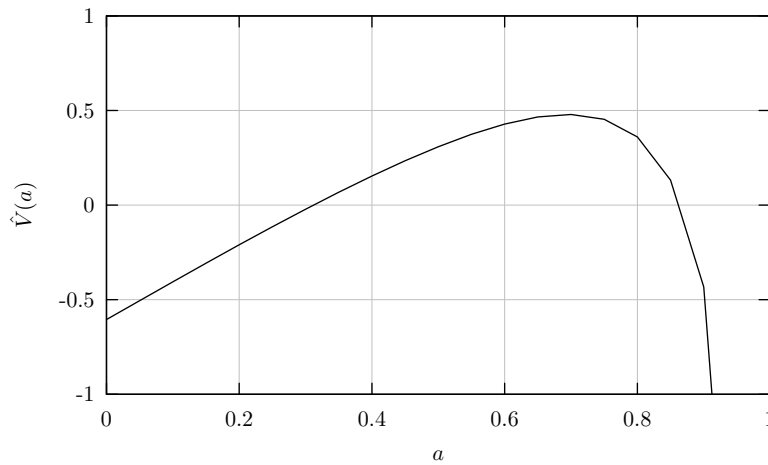


Figura 9.4: Energía potencial mínima para cada valor de longitud de grieta (Datos:  $k = 1, F = 1, \gamma = 1$ ).

Expresando  $\hat{V}$  en función del potencial original  $V$  la relación anterior se puede escribir alternativamente como

$$\frac{\partial V(\delta, a)}{\partial \delta} \frac{\partial \delta(a)}{\partial a} + \frac{\partial V(\delta, a)}{\partial a} = 0 .$$

Como el primer término se cancela debido a (9.7) concluimos que el valor crítico del tamaño de grieta vendrá dado por la identidad:

$$\frac{\partial V(\delta, a)}{\partial \delta} = \frac{\partial V(\delta, a)}{\partial a} = 0 .$$

La tasa de energía disponible  $G$  y la tenacidad del material son

$$G = -\frac{\partial}{\partial a}(V_{int} + V_{ext}) = \frac{3}{2}k\delta^2 a^2 , \quad G_c = \frac{\partial}{\partial a}V_{gr} = 2\gamma ,$$

siendo  $\delta$  la elongación en el equilibrio dada por la ecuación (9.8). Evaluando la tasa de energía disponible en ese punto se obtiene

$$G = \frac{3}{2} \frac{F^2}{k} \frac{a^2}{(1 - a^3)^2} ,$$

comprobándose que el tamaño crítico de la grieta, dado por  $G = G_c$  se corresponde con la solución de

$$\frac{a^2}{(1 - a^3)^2} = \frac{4\gamma k}{3F^2} .$$

La tasa de energía disponible  $G$  es siempre positiva hasta la rotura del muelle. Es decir, si el muelle se encuentra sometido a una fuerza  $F$ , el crecimiento

de la grieta siempre disminuirá su energía potencial (interna + externa). Sin embargo, cuando la grieta crece, la energía potencial  $V_{gr}$  crece, así que el balance total de energía no está tan claro. El valor crítico de la superficie de grieta es precisamente aquel valor para el cual el balance pasa de ser positivo (la grieta no tiende a abrirse porque la energía potencial aumenta) a ser negativo (la grieta quiere abrirse porque al hacerlo la energía potencial del conjunto disminuye).

&lt;

Para materiales dúctiles la teoría de Griffith no es muy exacta, sin embargo admite una simple modificación que la hace precisa incluso cuando los efectos plásticos son importantes. Desarrollada a partir del trabajo de Irwin, esta modificación consiste en añadir a la energía  $\gamma$  de creación de superficie un término  $\gamma_p$  de densidad de energía por unidad de superficie debido a la disipación plástica. Otra forma de resolver este problema es reemplazar la tenacidad  $G_c$  de la ecuación (9.4) por una tasa de disipación de energía  $R$  que incluya los efectos plásticos durante el crecimiento de grieta. En cualquier caso, como las ecuaciones que se han obtenido derivaban de la hipótesis de respuesta elástica lineal, este tipo de modificaciones sencillas sólo tienen sentido si las contribuciones plásticas están limitadas a un entorno pequeño de la grieta y, en conjunto, se puede seguir afirmando que el sólido tiene una respuesta elástica.

### 9.2.1. Aplicación: placa con grieta

Aplicamos la teoría de Griffith para la determinación de la resistencia a la fractura de una placa con una grieta transversal pre-existente, tal y como aparece en la figura 9.5, un ejemplo que ya consideró este mismo autor en su artículo de 1921.

Antes de analizar el fallo, es necesario mencionar que Inglis [3] obtuvo en 1913 un resultado básico para el análisis de la fractura. Si una chapa tiene una inclusión elipsoidal de diámetros  $2a$  y  $2b$  muy pequeños comparados con la longitud y anchura de la misma, y ésta se carga con una tensión  $\sigma_0$  perpendicularmente al diámetro de dimensión  $2a$ , la tensión máxima que se alcanza es precisamente donde este diámetro corta a la elipse y tiene un valor

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_0 \left( 1 + \frac{2a}{b} \right). \quad (9.9)$$

El cociente  $\sigma_{\text{máx}}/\sigma_0$  se conoce como el **factor de concentración de tensiones** y, por ejemplo, para el caso de una inclusión circular, tiene un valor de 3.

Consideramos ahora una placa de anchura  $H$  y longitud  $L$  con una grieta de longitud  $2a$ , siendo  $a \ll H, L$ . La placa está sometida a una tensión  $\sigma_0$  en dos de sus bordes y está en un estado plano, bien de tensión o de deformación



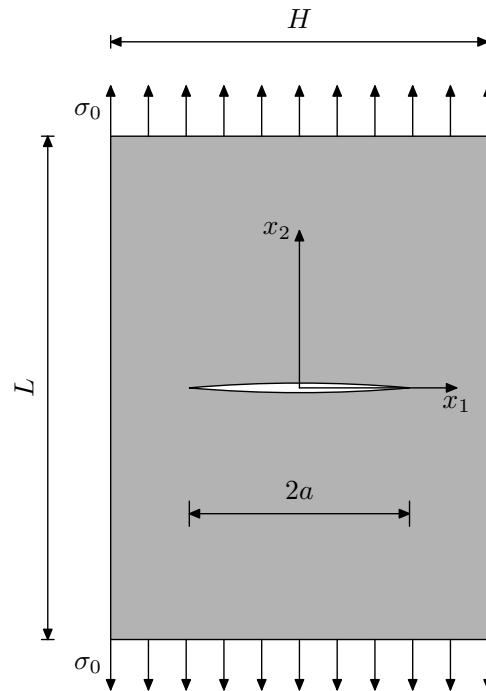


Figura 9.5: Placa con grieta transversal sometida a tracción.

(véase la figura 9.5). Basándose en la solución de Inglis, Griffith demostró que la suma de las energías interna y externa, por unidad de espesor, es

$$V_{int} + V_{ext} = V_0 - \frac{\pi\sigma_0^2 a^2}{\tilde{E}} \quad (9.10)$$

siendo  $V_0$  la energía de la placa sin inclusión y  $\tilde{E} = E$  si la el estado es de tensión plana y  $\tilde{E} = E/(1 - \nu^2)$  si es de deformación plana. La energía de la superficie fracturada es, por unidad de espesor y para una grieta de longitud  $2a$  igual a

$$V_{gr} = 4\gamma a . \quad (9.11)$$

Sustituyendo estas dos expresiones en la ecuación (9.3) se sigue que el valor crítico de la tensión es

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{2\tilde{E}\gamma}{\pi a}} . \quad (9.12)$$

Este es el valor de la tensión que hace que la grieta se abra. Desde otro punto de vista, si se conoce el valor de  $\sigma_0$ , que es fijo, la (semi)longitud crítica de la grieta será

$$a_c = \frac{2\tilde{E}\gamma}{\pi\sigma_0^2} . \quad (9.13)$$



Figura 9.6: George Rankin Irwin (1907–1998).

La tasa de energía disponible por unidad de área y la tenacidad del material son, respectivamente,

$$G = \frac{\pi a \sigma_0^2}{\tilde{E}}, \quad G_c = 2\gamma. \quad (9.14)$$

### 9.3. Enfoque local de la mecánica de la fractura

Cuando un sólido tiene una grieta y está sometido a tensiones y deformaciones, las tensiones se “concentran” alrededor de la punta de grieta. A partir del estudio clásico de Inglis [3] sobre el estado tensional en una chapa con un hueco elipsoidal, se considera que Irwin inició una nueva forma de estudiar la fractura a partir de los campos tensionales en la zona de la punta de grieta de sólidos en estados planos [2].

De forma resumida, la teoría de Irwin, o enfoque local, se basa en primer lugar en que las componentes del tensor de tensiones cerca de la punta de una grieta tienen siempre, *independientemente de la forma de la pieza y las cargas sobre ella*, una expresión en coordenadas cilíndricas tal como

$$\sigma_{ij}(r, \theta, z) = \frac{k}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^{n/2} g_{ij}(\theta). \quad (9.15)$$

En esta ecuación  $r$  es la distancia al fondo de grieta y  $\theta$  el ángulo en el sistema de la figura ??; las funciones  $f_{ij}$  e  $g_{ij}$  son funciones adimensionales. La geometría y cargas de la pieza afectan a las constantes  $k, C_n$  y a las funciones  $f_{ij}, g_{ij}$ .

En todos los casos la serie de Taylor de cada componente  $\sigma_{ij}$  tiene un término que crece sin límite cuando  $r$  tiende a 0, es decir, a medida que se acerca al borde de grieta, e infinitos términos que se anulan en dicho

límite. Es decir, cuando se desea conocer el valor de la tensión muy cerca del borde de grieta, sólo el primer término importa y además siempre crece como  $r^{-1/2}$ . En este término la constante  $k$  y las funciones  $f_{ij}$  dependen del modo de apertura y es habitual en la literatura escribir

$$\sigma_{ij}^I = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta), \quad \sigma_{ij}^{II} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta), \quad \sigma_{ij}^{III} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{III}(\theta), \quad (9.16)$$

siendo  $K_I, K_{II}$  y  $K_{III}$  los llamados **factores de intensidad de tensiones**. Para cada caso de cargas y geometría estos factores indican cuánto de grandes son las tensiones cerca de la grieta, y el resto de términos se encarga de cómo se distribuyen éstas. Además, como en todo momento se supone que el comportamiento es elástico, se puede aplicar el principio de superposición para concluir que en un caso de apertura cualquiera

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^{II} + \sigma_{ij}^{III}. \quad (9.17)$$

En realidad, cuando  $r$  tiende a cero, la tensión tiene un valor infinito para cualquier nivel de carga y es imposible que se cumpla una relación constitutiva elástica lineal. Así pues, la solución (9.16) es válida sólo en la denominada **región autónoma**, donde  $r$  es mayor que una cierta distancia, de forma que no se sobrepase el límite elástico, y menor que otra, de forma que los términos de orden mayor en la serie de Taylor tengan un peso despreciable en la solución. La región cercana a la punta de grieta, donde el material responde plásticamente, se conoce como **zona de proceso** o **zona plástica**.

Para muchos tipos de geometrías y cargas se han calculado de forma exacta el valor de los factores de intensidad de tensiones. Por ejemplo, para una placa rectangular sometida a tracción de valor  $\sigma_0$  con una grieta de longitud  $2a$  se sabe que el factor de intensidad de tensiones correspondiente al modo I de apertura es

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a}. \quad (9.18)$$

Suponiendo que el material falla cuando la tensión en la punta de grieta alcanza un valor crítico, deberá existir un valor crítico del factor de intensidad de tensiones, que llamamos **la tenacidad**  $K_I^c$  en el caso de modo I, tal que la grieta se abre cuando se cumple la condición

$$K_I = K_I^c. \quad (9.19)$$

El parámetro  $K_I^c$  se suele tomar como constante, para cada material, y es distinto de  $K_{II}^c$  y  $K_{III}^c$

### 9.3.1. Equivalencia entre el enfoque global y el local

Los dos enfoques para calcular la resistencia de una pieza con una fisura pre-existente deben de resultar en el mismo valor para las cargas críticas o

Material	Tenacidad $K_I^c$ (MPa $\sqrt{\text{m}}$ )
Aleación de aluminio	24
Acero	50
Aleación de titanio	44-66
Hormigón	0.2-1.4
Vidrio	0.7-0.8
Poliestireno	0.7-1.1

Cuadro 9.1: Valores típicos de tenacidad para varios materiales.

el tamaño crítico de las grietas. Combinando las ecuaciones (9.14) y (9.18) concluimos que la tasa de energía disponible  $G$  y el factor de amplificación de tensiones  $K_I$  están relacionados mediante la ecuación

$$G\tilde{E} = K_I^2. \quad (9.20)$$

Aunque esta identidad se ha demostrado para el caso particular de la placa con una grieta, resulta ser válida en cualquier situación. En el caso de un modo de fractura mixto, se satisface

$$G\tilde{E} = K_I^2 + K_{II}^2 + \frac{\tilde{E}}{2\mu} K_{III}^2. \quad (9.21)$$

Geometría	Factor de intensidad de tensiones $K_I$
Grieta de longitud $2a$ en una placa infinita	$\sigma_\infty \sqrt{\pi a}$
Grieta de longitud $a$ en el borde de una placa semi-infinita	$1,12\sigma_\infty \sqrt{\pi a}$
Grieta de longitud $2a$ en el centro de una placa de anchura $H$	$\sigma_\infty \sqrt{H \tan \frac{\pi a}{H}}$

▷ **Ejemplo 9.3.1.** Determinar el tamaño crítico de grieta en placas de acero y vidrio cargadas en el plano con una tensión nominal  $\sigma_\infty = 40$  MPa (Datos:  $K_{I,acero}^c = 50$  MPa  $\sqrt{\text{m}}$ ;  $K_{I,vidrio}^c = 1$  MPa  $\sqrt{\text{m}}$ ).

En la placa de acero el tamaño crítico de grieta es

$$2a_{c,acero} = \frac{2}{\pi} \left( \frac{K_{I,acero}^c}{\sigma_\infty} \right)^2 = 0,995 \text{ m}.$$

En la placa de vidrio, a su vez, el tamaño crítico de grieta es:

$$2a_{c,vidrio} = \frac{2}{\pi} \left( \frac{K_{I,vidrio}^c}{\sigma_\infty} \right)^2 = 3,99 \cdot 10^{-4} \text{ m}.$$

▷ **Ejemplo 9.3.2.** Un depósito esférico de radio 400 mm y espesor 5 mm tiene una grieta de longitud 2 mm y está fabricado de un material con tenacidad  $K_{IC} = 1 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ . Determinar la máxima presión que éste resiste antes de que la grieta se propague.

El factor de intensificación de tensiones en una esfera sometida a presión interna es

$$K_I = SY Sqrt{\pi}c \quad (9.22)$$

siendo  $c$  la mitad de la longitud de la grieta,  $S$  la tensión de membrana en la esfera a presión ( $S = \frac{pR}{2t}$ , con  $t$  el espesor y  $R$  el radio medio). El factor de forma  $Y$  tiene por expresión para este caso

$$Y = (1 + 3\lambda^{1,9})^{0,4}, \quad \lambda = \frac{c}{\sqrt{Rt}}. \quad (9.23)$$

Sustituyendo los datos del problema se obtiene que  $K_I = 2,222995p$  e igualando este valor a la tenacidad de fractura resulta que la presión crítica es  $p = 448,4 \text{ kPa}$ .

◁

## Problemas

**9.1.** De forma aproximada, la tensión en un entorno de la punta de grieta tiene una expresión de la forma

$$\sigma = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}.$$

Determina el radio de la zona plástica para un acero típico.

**9.2.** Una chapa agrietada como la de la figura 9.5, de espesor  $t$ , está sujeta por su borde inferior y traccionada por el superior, siendo el desplazamiento de éste igual a  $u$ . Si la longitud de la grieta es mucho menor que las dimensiones de la chapa se puede demostrar que la fuerza de tracción  $F = tH\sigma_0$  y el desplazamiento  $u$  tienen una relación que, de forma aproximada, se puede escribir como:

$$F = k(a)u, \quad k(a) = \frac{EtH^2}{LH + 2\pi a^2},$$

siendo  $k(a)$  la rigidez de la chapa.

- a) Encuentra la expresión de la energía potencial en función de  $u$  y  $a$ . Dibuja una gráfica las energías  $\Pi_{int} + \Pi_{ext}$ ,  $\Pi_{gr}$  y  $\Pi$  como funciones de  $a$ .
- b) Suponiendo que la chapa se carga con control de desplazamiento, interpreta la condición  $\partial\Pi/\partial a = 0$  a la vista de las gráficas de la energía. Discute la estabilidad de la grieta crítica.

- c) Encuentra la expresión de la energía potencial complementaria en función de  $F$  y  $a$ . Dibuja una gráfica las energías  $\Pi_{int} + \Pi_{ext}$ ,  $\Pi_{gr}$  y  $\Pi$  como funciones de  $a$ .
- d) Suponiendo que la chapa se carga con control de fuerza, interpreta la condición  $\partial\Pi/\partial a = 0$  a la vista de las gráficas de la energía. Discute la estabilidad de la grieta crítica.

**9.3.** Determina cuál es la presión crítica en un depósito cilíndrico de aluminio de diámetro 60 cm, espesor 5 mm, con una grieta longitudinal de tamaño 3 mm.

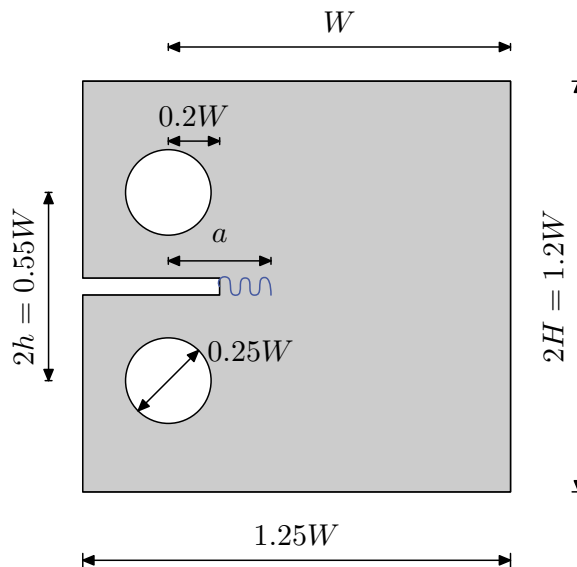


Figura 9.7: Problema 9.4

**9.4.** Para medir experimentalmente la tenacidad  $K_I^c$  es habitual emplear probetas como la de la figura 9.7, cuyas dimensiones están especificadas en norma ASTM. Al ensayar un hormigón en una probeta con  $W = 10$  cm, anchura 5 cm y  $a = 3$  cm, se encuentra que la carga de rotura es de  $P = 400$  N. Determinar cuál es la tenacidad de este material y cuál sería la fuerza necesaria para romper la probeta si no hubiera ninguna grieta en ella.

## Bibliografía

- [1] Ted L Anderson. *Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications*. CRC Press I Llc, 2005.

- 
- [2] A A Griffith. The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 221:163–198, January 1921.
- [3] C E Inglis. Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. *Transactions of the Institute of Naval Architects*, 55:219–241, 1913.