Apéndice A

Coordenadas cilíndricas

Se recogen a continuación los principales resultados de cálculo vectorial y tensorial en coordenadas cilíndricas. Para ello, se considera un sistema de coordenadas cilíndrico (r, θ, z).

A.1. Operador gradiente

Si f es una campo escalar diferenciable, su gradient en coordenadas cilíndricas es:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{f}{z}\boldsymbol{e}_z \ . \tag{A.1}$$

A.2. Operador divergencia

Si $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(r, \theta, z)$ es un campo vectorial con componentes v_r, v_θ, v_z, su divergencia es el campo escalar

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \tag{A.2}$$

Si $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(r, \theta, z)$ es un campo tensorial con componentes $T_{rr}, T_{r\theta}, \ldots$, su divergencia es el campo vectorial

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{T} = &\left(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial \theta} + (T_{rr} - T_{\theta\theta})\right) + \frac{\partial T_{zr}}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_r \\
&+ \left(\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + (T_{r\theta} + T_{\theta r}\right) + \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_\theta \\
&+ \left(\frac{\partial T_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial T_{\theta z}}{\partial \theta} + T_{rz}\right) + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_z.
\end{aligned} \tag{A.3}$$

A.3. Deformación infinitesimal.

El cálculo de las componentes del tensor de deformación infinitesimal en un sistema de coordenadas no cartesiano conlleva complicaciones que no estudiamos ahora. Resumiendo el resultado principal, en un sistema de coordenadas cilíndrico (r, θ, z), el tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ tiene por expresión matricial:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} u_{r,r} & \frac{1}{2}\left(\frac{u_{r,\theta}}{r} + u_{\theta,r} - \frac{u_\theta}{r}\right) & \frac{1}{2}\left(u_{r,z} + u_{z,r}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{u_{r,\theta}}{r} + u_{\theta,r} - \frac{u_\theta}{r}\right) & \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta,\theta}}{r} & \frac{1}{2}\left(\frac{u_{z,\theta}}{r} + u_{\theta,z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(u_{r,z} + u_{z,r}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{u_{z,\theta}}{r} + u_{\theta,z}\right) & u_{z,z} \end{bmatrix} \tag{A.4}$$