Energía y trabajo

I. Romero
ETSI Industriales, Universidad Politécnica de Madrid
ignacio.romero@upm.es

29 de septiembre de 2016

La energía es el concepto fundamental de la mecánica y en el caso de la Resistencia de Materiales su estudio proporciona los métodos de cálculo más útiles. De hecho, el cálculo estructural se basa, casi exclusivamente, en la aplicación sistemática de algunos de los resultados que se presentan en este resumen, y otros más avanzados, pero estrechamente relacionados.

1. Trabajo

El concepto de ***trabajo*** es central en mecánica y se define siempre para procesos. En un proceso que va desde el estado 1 al estado 2, el trabajo realizado por un sistema de fuerzas $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \dots$ se define como

$$W_{1\to 2} = \int_1^2 \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \, \mathrm{d}\boldsymbol{u}_i \ , \tag{1}$$

siendo $\boldsymbol{u}_i$ el desplazamiento bajo la carga $\boldsymbol{F}_i$. Es importante subrayar que no existe un "diferencial de trabajo" sino lo que se llama a veces un "diferencial inexacto" $\delta W = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{u}$, que no es el diferencial de ninguna función, por lo que el resultado de la integral (1) depende del camino entre 1 y 2. Nótese además que en la definición del trabajo las fuerzas se operan con el producto escalar con los desplazamientos bajo ellas.

En el caso de una viga u otro modelo estructural, las fuerzas y los desplazamientos en la ecuación (1) han de entenderse en sentido generalizado: $\boldsymbol{F}$ puede ser una fuerza o un momento concentrado y $\boldsymbol{u}$ un desplazamiento o un giro.

2. Trabajo y energía en sistemas elásticos

Un ***sistema elástico*** se define como aquel en el que todo el trabajo aplicado en un proceso se almacena en forma de energía (elástica), que puede ser completamente recuperada al retirar las cargas.

En un sistema ***elástico y lineal*** es el que, además de ser elástico en el sentido antes indicado, tiene fuerzas y desplazamientos proporcionales. En estos sistemas, si un sistema de fuerzas $\{\boldsymbol{F}_i\}$ provoca unos desplazamientos $\{\boldsymbol{u}_i\}$, unas fuerzas escaladas $\{\alpha\boldsymbol{F}_i\}$ provoca los desplazamientos $\{\alpha\boldsymbol{u}_i\}$. En este tipo de sistemas el trabajo en un proceso se puede calcular de manera muy sencilla, sin recurrir a ninguna integral.

Teorema 1 (Clapeyron)**.** *El trabajo realizado al aplicar un sistema de cargas generalizadas $\{\boldsymbol{F}_i\}$ sobre un sistema elástico lineal es*

$$W_{1\to 2} = \sum_i \frac{1}{2} \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{u}_i \ , \tag{2}$$

siendo $\boldsymbol{u}_i$ el valor del desplazamiento bajo la carga i-ésima cuando se han aplicado todas las cargas.

Demostración. Consideremos un proceso de carga arbitrario $\boldsymbol{F}_i(t) = \alpha(t)\boldsymbol{F}_i$, siendo $\alpha(t)$ una función diferenciable con $\alpha(1) = 0, \alpha(2) = 1$. El trabajo sobre un sistema elástico se puede escribir como

$$\begin{aligned} W_{1\to 2} &= \int_1^2 \alpha(t) \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{u}_i \alpha'(t) \, \mathrm{d}t \\ &= \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{u}_i \int_1^2 \alpha(t)\alpha'(t) \, \mathrm{d}t \\ &= \sum_i \frac{1}{2} \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{u}_i. \end{aligned} \tag{3}$$

□

El resultado de este teorema permite concluir que el trabajo realizado por un sistema de cargas en una estructura elástica lineal es independiente del proceso, por lo que sólo depende del estado inicial y final. En este caso existe una función potencial, la ***energía elástica*** U, que es función únicamente del estado y tal que

$$W_{1\to 2} = U(\{\boldsymbol{u}_i^{(2)}\}) - U(\{\boldsymbol{u}_i^{(1)}\}) \ . \qquad (4)$$

Si llamamos, como antes, $\{\boldsymbol{u}_i\}$ a los desplazamientos en el estado final de carga y suponemos que la energía es nula en el estado 1 podemos escribir de forma más sencilla

$$W_{1\to 2} = U(\{\boldsymbol{u}_i\}) \ . \qquad (5)$$

La energía elástica es, desde el punto de vista matemático, una función de los desplazamientos $\{\boldsymbol{u}_i\}$. En un sistema elástico hay una relación unívoca entre desplazamientos y fuerzas aplicadas así que siempre se puede escribir la energía como una función de las fuerzas. A ésta se la conoce como la ***energía elástica complementaria***, y se define como

$$U^* = U^*(\{\boldsymbol{F}_i\}) = U(\{\boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{F})\}) \ . \qquad (6)$$

Aunque el valor numérico de U y U^* coinciden para un sistema elástico lineal, son funciones diferentes. Además, para otros tipos de estructuras, ya el valor no es el mismo.

3. Desplazamientos eficaces

Dado un sistema de fuerzas $\{\boldsymbol{F}_i\}$ (generalizadas) aplicadas sobre puntos $i = 1, 2, \ldots$ que causan desplazamientos (generalizados) $\{\boldsymbol{u}_i\}$ sobre los mismos puntos, se define el ***desplazamiento eficaz*** o ***efectivo*** δ_i a la proyección de $\boldsymbol{u}_i$ sobre la dirección de $\boldsymbol{F}_i$, es decir,

$$\delta_i = \boldsymbol{u}_i \cdot \frac{\boldsymbol{F}_i}{|\boldsymbol{F}_i|}. \qquad (7)$$

Estos desplazamientos son cantidades escalares, más cómodas de manejar que los vectores de las fuerzas y los desplazamientos, y permiten escribir el trabajo en un proceso simplemente como

$$W_{1\to 2} = \sum_i \frac{1}{2} F_i \ \delta_i \ , \qquad (8)$$

siendo $F_i = |\boldsymbol{F}_i|$.

4. El teorema de reciprocidad de Maxwell-Betti

Consideremos como antes una estructura sometida a un sistema de fuerzas generalizadas $\{\boldsymbol{F}_i\}$ e indiquemos con la notación δ_i^j al desplazamiento eficaz en el punto i debido *únicamente* a la fuerza $\boldsymbol{F}_j$. Si, sobre la estructura descargada, aplicamos primero una carga $\boldsymbol{F}_1$ y después otra $\boldsymbol{F}_2$ (sin retirar la primera), el trabajo total que estas dos fuerzas realizan sobre la estructura es

$$W_{1\to 2} = \frac{1}{2} F_1 \delta_1^1 + F_1 \delta_1^2 + \frac{1}{2} F_2 \delta_2^2 \ . \qquad (9)$$

Si se invierte el orden de aplicación de las cargas el trabajo se puede calcular como

$$\tilde{W}_{1\to 2} = \frac{1}{2} F_2 \delta_2^2 + F_2 \delta_2^1 + \frac{1}{2} F_1 \delta_1^1 \ . \qquad (10)$$

Puesto que en ambos casos todo el trabajo se almacena en energía y en un sistema elástico la energía es independiente del proceso de carga se concluye que $W_{1\to 2} = \tilde{W}_{1\to 2}$ y por tanto

$$\delta_1^2 = \delta_2^1 \ . \qquad (11)$$

En general, para cualquier pareja de índices, se verifica que los coeficientes δ_i^j recíprocos son iguales, es decir, $\delta_i^j = \delta_j^i$.

5. Los teoremas de Castigliano

Los dos teoremas de Castigliano son la herramienta más útil para la resolución "a mano" de problemas en Resistencia de Materiales. Su aplicación se reduce a sistemas elásticos lineales para los que los desplazamientos eficaces son proporcionales a las fuerzas aplicadas, es decir,

$$\delta_i = \sum_j \phi_{ij} F_j \ , \tag{12}$$

donde ϕ_{ij} son constantes que dependen de la geometría, material, y apoyos de la estructura y se denominan ***coeficientes de flexibilidad***. De manera análoga, también se puede escribir

$$F_i = \sum_j \kappa_{ij} \delta_j \tag{13}$$

donde las constantes κ_{ij} son los llamados ***coeficientes de rigidez***.

Teorema 2 (Primer teorema de Castigliano)**.** *La derivada de la energía elástica respecto del desplazamiento eficaz en un punto es la fuerza aplicada sobre éste, es decir,*

$$F_i = \frac{\partial U}{\partial \delta_i} \ . \tag{14}$$

Demostración. En un sistema elástico lineal se tiene que su energía elástica se puede escribir como

$$U = \sum_i \frac{1}{2} F_i \delta_i = \sum_{i,j} \frac{1}{2} \kappa_{ij} \delta_i \delta_j .$$

De esta relación se sigue directamente (14). □

Teorema 3 (Segundo teorema de Castigliano)**.** *La derivada de la energía elástica complementaria respecto de la fuerza aplicada en un punto es el desplazamiento eficaz de éste, es decir,*

$$\delta_i = \frac{\partial U^*}{\partial F_i} \ . \tag{15}$$

Demostración. En un sistema elástico lineal la energía elástica complementaria se escribe de la siguiente manera

$$U^* = \sum_i \frac{1}{2} F_i \delta_i = \sum_{i,j} \frac{1}{2} \phi_{ij} F_i F_j .$$

Y, como en el primer teorema, de esta expresión se puede comprobar directamente el teorema (15). □