

Flexión de vigas

I. Romero

ETSI Industriales, Universidad Politécnica de Madrid

ignacio.romero@upm.es

28 de octubre de 2016

El estudio de la flexión en vigas es el más complejo e importante de cuantos se estudian en Resistencia de Materiales. Para un primer análisis empleamos la teoría de flexión de Euler-Bernoulli, que es la más sencilla y empleada en la mayoría de los casos. Teorías más avanzadas, como la de Timoshenko, se abordan en cursos más avanzados.

1. Tensiones

El estudio de las tensiones en vigas sometidas a flexión se comienza suponiendo que una viga recta está sometida a *flexión pura*, es decir, constante a lo largo de su directriz. En este caso, y por un razonamiento puramente geométrico, la viga se curva y adquiere la forma de un arco de circunferencia, de curvatura constante. Indicando como v el desplazamiento en dirección del eje y , la curvatura es

$$\kappa(x) = \frac{v''(s)}{\sqrt{1 + \left(\frac{v'(x)}{2}\right)^2}}. \quad (1)$$

Si consideramos únicamente situaciones en los que los desplazamientos v y los giros $\theta = v'$ son pequeños, la curvatura es, aproximadamente $k = v''$.

Una rebanada de esta viga sometida a flexión pura cambia su geometría al deformarse de manera que vista desde un lateral, pasa de tener una proyección rectangular a una trapezoidal. Llamamos *eje neutro* al lugar geométrico de los puntos en la sección cuyas fibras no sufren deformación longitudinal. Colocando un sistema de referencia (ξ, η) centrado en el eje neutro observamos que las deformaciones longitudinales, cuando esta rebanada está sometida a flexión pura son,

$$\varepsilon(x, \eta) = -\kappa(x)\eta. \quad (2)$$

Las tensiones normal asociadas a estas deformaciones son $\sigma_x(x, \eta) = E\varepsilon(x, \eta)$. La resultante de estas últimas ha de ser cero, porque las secciones transversales en la rebanada sólo están sometidas a un momento flector, así que

$$0 = \int_A \sigma_x(x, \eta) d\xi d\eta = -E\kappa(x) \int_A \eta\xi d\eta. \quad (3)$$

Esta relación se cumple si el eje neutro (que corresponde con $\eta = 0$) pasa por el centro de área, es decir, corta a la directriz de la viga y por tanto $(\xi, \eta) = (z, y)$. Además, si el momento flector que actúa sobre la rebanada es M_z ,

$$\begin{aligned} M_z(x) &= \int_A \sigma_x(x, y)(-y) dA \\ &= E\kappa(x) \int_A y^2 dA \\ &= E\kappa(x)I_z(x), \end{aligned} \quad (4)$$

siendo I_z el momento de inercia de la sección respecto del eje z . Finalmente, empleando las relaciones (2)-(4) obtenemos la expresión de las tensiones normales en flexión:

$$\sigma_x(x, y) = E\varepsilon(x, y) = -E\kappa(x)y = -\frac{M_z(x)}{I_z(x)}y. \quad (5)$$

Esta expresión se conoce como la *fórmula de Navier*. Las máximas tensiones normales (en valor absoluto) sobre una sección sometida a un par flector se darán, según la fórmula (5), allá donde y sea máximo. Es decir,

$$|\sigma_x|_{\text{máx}}(x) = \frac{M_x(x)}{I_z(x)}|y|_{\text{máx}} = \frac{M_x(x)}{I_z(x)/|y|_{\text{máx}}} = \frac{M_x(x)}{W_z(x)}. \quad (6)$$

La cantidad $W_z = I_z/|y|_{\text{máx}}$ es el *módulo resistente a flexión* de la sección.

Cuando una viga está sometida a un momento flector variable se dice que la *flexión* es *simple*. En este caso, el razonamiento geométrico que hemos empleado para llegar a la fórmula de Navier no es cierto y se comprueba además, experimentalmente, que las secciones transversales se alabean. Como estas deformaciones son pequeñas en vigas largas, se suponen despreciables y por tanto se admite la fórmula de Navier en cualquier circunstancia, para flectores puros o simples.

2. Equilibrio

Para encontrar la ecuación diferencial de una viga sometida a flexión empleamos el mismo razonamiento que para el esfuerzo normal y el momento

torsor. En el caso del flector, una rebanada diferencial genérica de una viga puede estar sometida a un flector y cortante cualquiera, y una carga por unidad de longitud vertical y hacia abajo q . El equilibrio de fuerzas verticales establece que

$$T(x) = T(x + dx) + q(x) dx . \quad (7)$$

Desarrollando en serie de Taylor el segundo cortante obtenemos

$$\frac{dT(x)}{dx} + q(x) = 0 . \quad (8)$$

Imponiendo ahora el equilibrio de momento en esta rebanada diferencial se sigue que

$$M_z(x) + q(x) \frac{(dx)^2}{2} = M_z(x + dx) + T(x + dx) dx . \quad (9)$$

Expandiendo en serie de Taylor, como antes, los términos evaluados en $x + dx$ y despreciando infinitésimos de orden superior se concluye

$$\frac{dM_z(x)}{dx} = T(x) . \quad (10)$$

Las ecuaciones (8) y (10) expresan en equilibrio de flectores y cortantes en vigas sometidas a estos esfuerzos y, como se puede apreciar, están acoplados. Ambas se pueden combinar, resultando en

$$\frac{d^2 M_z(x)}{dx^2} + q(x) = 0 . \quad (11)$$

3. Deformación

Una sección sometida a flexión sufre una deformación que es la curvatura, y la relación entre ambas viene dada por la ecuación (5). Recordando que la curvatura es $\kappa = v''$ concluimos que

$$v''(x) = \frac{M_z(x)}{EI_z(x)} , \quad (12)$$

o, derivando esta ecuación dos veces y empleando (11),

$$v''''(x) = \frac{-q(x)}{EI_z(x)} . \quad (13)$$

Esta ecuación diferencial se conoce con el nombre de la **ecuación de la elástica**. A diferencia de la ecuación diferencial que se empleaba para calcular la deformación en vigas sometidas a esfuerzo normal o torsor, la elástica es de segundo orden, lo cual dificulta algo su resolución.

4. Energía elástica

Para el cálculo de la expresión de la energía elástica en una viga sometida a flexión empleamos el mismo razonamiento que en temas anteriores: calculamos el trabajo de las fuerzas exteriores que se pueden aplicar sobre un tramo genérico de viga y lo re-escribimos sólo en función del valor del momento flector.

En tramo genérico de viga $x \in (A, B)$ sometido a flexión pueden actuar fuerzas y pares en sus extremos, además de una fuerza por unidad de longitud vertical y hacia abajo. Según el teorema de Clapeyron, el trabajo que todas éstas realizan es:

$$W = \frac{1}{2} F_A v_A + \frac{1}{2} F_B v_B + \frac{1}{2} M_A \theta_A + \frac{1}{2} M_B \theta_B - \frac{1}{2} \int_A^B q(x) v(x) dx . \quad (14)$$

Empleando la ecuación del equilibrio (11), el trabajo se puede re-escribir como

$$W = \frac{1}{2} F_A v_A + \frac{1}{2} F_B v_B + \frac{1}{2} M_A \theta_A + \frac{1}{2} M_B \theta_B + \frac{1}{2} \int_A^B \frac{d^2 M_z(x)}{dx^2} v(x) dx . \quad (15)$$

Finalmente, integrando por partes dos veces y utilizando las condiciones de contorno se concluye que el trabajo realizado por las fuerzas exteriores, y por tanto la energía elástica almacenada, es

$$U = \int_A^B \frac{M_z(x)^2}{2EI_z(x)} dx . \quad (16)$$

5. La ecuación universal

En una viga recta, donde la generatriz coincide con un eje cartesiano x la ley de momentos flectores se puede escribir como

$$M(x) = \sum_{i=1}^{N_m} M_i \langle x - a_i \rangle^0 + \sum_{i=1}^{N_p} P_i \langle x - b_i \rangle^1 + \sum_{i=1}^{N_q} \frac{q_i}{2} (\langle x - c_i \rangle^2 - \langle x - d_i \rangle^2) , \quad (17)$$

donde las constantes a_i, b_i, c_i, d_i se refieren al lugar de aplicación de las cargas correspondientes, según se indica en la figura 5.

En este caso, y si la rigidez EI es constante, la ecuación de la elástica (12) en tramos donde ésta

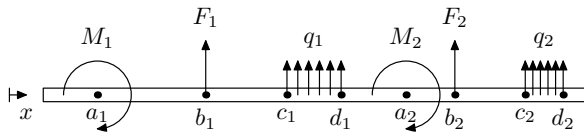


Figura 1: Definición de cargas genéricas sobre una viga a flexión.

sea válida se puede integrar dos veces resultando

$$\begin{aligned}
 EIv(x) &= EIv_0 + EI\theta_0 x \\
 &+ \sum_{i=1}^{N_m} \frac{M_i}{2!} \langle x - a_i \rangle^2 + \sum_{i=1}^{N_p} \frac{P_i}{3!} \langle x - b_i \rangle^3 \\
 &+ \sum_{i=1}^{N_q} \frac{q_i}{4!} (\langle x - c_i \rangle^4 - \langle x - d_i \rangle^4),
 \end{aligned} \tag{18}$$

siendo v_0 y θ_0 el desplazamiento vertical y giro, respectivamente, en el origen de coordenadas.

La expresión (18) es extremadamente cómodo para integrar la ecuación de la elástica, pero no es de aplicación completamente general. Resumiendo las condiciones indicadas anteriormente, la ecuación universal se puede emplear

- Para evaluar el desplazamiento vertical cuando los momentos flectores son en un único plano.
- Si la viga es recta.
- Si la ecuación diferencial se cumple en todo punto, es decir, si no hay rótulas o articulaciones en la viga.
- Si la rigidez EI es constante.
- Si las cargas exteriores se limitan a fuerzas o momentos concentrados y cargas uniformemente distribuidas.
- El origen de coordenadas ha de coincidir con el extremo de la viga.

La expresión (18) se puede generalizar incluyendo otros tipos de cargas, como distribuidas triangulares, parabólicas, etc. Para cada uno de estos tipos aparecería un término más en la suma de la elástica integrada. Aunque no tiene ninguna dificultad obtener estos otros términos, nos limitamos a los tres explicados anteriormente por ser los más comunes.