

# Pandeo de vigas

I. Romero

ETSI Industriales, Universidad Politécnica de Madrid

ignacio.romero@upm.es

11 de diciembre de 2016

Hasta ahora, todo lo que se ha estudiado sobre la respuesta mecánica de vigas estaba basado en una respuesta elástica, lineal y debido a pequeñas deformaciones. Estas hipótesis, aunque aparentemente muy restrictivas, permiten resolver multitud de problemas en estructuras. Sin embargo, se aprecia experimentalmente que las vigas sometidas a esfuerzos *de compresión* se comportan de una manera que no se puede explicar con los modelos desarrollados hasta ahora. Además, este tipo de respuesta puede dar lugar a fallos estructurales catastróficos, con lo que resulta importante analizarlo.

## 1. Descripción del pandeo

Se observa experimentalmente que los miembros estructurales delgados sometidos a cargas compresivas pierden su estabilidad cuando estas cargas alcanzan un cierto valor crítico. Esta carga es la llamada *carga crítica de pandeo*.

Por ejemplo, cuando sometemos una barra recta a compresión, ésta se acorta y el acortamiento es proporcional al esfuerzo normal. Al superar un cierto valor de la carga compresiva, se observa que la barra puede seguir recta o doblarse. De hecho, la primera solución, que es la que predice la teoría desarrollada en el tema de esfuerzo normal, es *inestable* y muy difícil de observar. Lo normal es que la barra abandone la solución recta y se doble.

Para ser capaz de predecir este comportamiento se debe de formular un modelo de vigas que sea no lineal, pues la linealidad implica que la solución es única y recta. Este modelo no lineal deberá predecir la bifurcación de soluciones cuando se alcance la carga crítica y, deseablemente, la estabilidad de ambas soluciones.

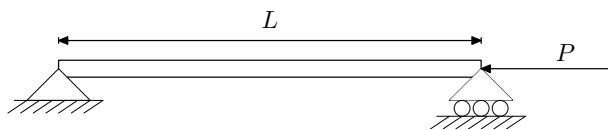


Figura 1: Viga biapoyada para el análisis de Euler.

## 2. Carga de Euler

Euler presentó el primer resultado para estudiar la carga de pandeo de vigas. Este análisis no es tan detallado como se pudiera desear pero suficiente para un primer estudio, pues únicamente permite hallar el valor de la carga de pandeo y la forma en el que la viga pandea, pero no la respuesta de ésta más allá de la carga crítica. Euler estudió la carga de pandeo de una viga biapoyada sometida a una carga de compresión (véase la figura 1). Si se estudia la estructura de la manera habitual, se obtiene la conclusión de que la viga se acorta una cantidad  $\delta = PL/EA$ , siendo éste el único efecto de la deformación. Sin embargo, si se estudia el equilibrio en la configuración deformada se obtiene un resultado más completo. En la figura 2 se estu-

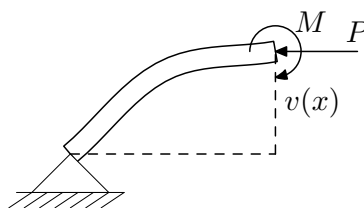


Figura 2: Equilibrio de una viga en la configuración deformada.

dia gráficamente el equilibrio de la viga o columna cuando se acepta que la deformación de la viga permite un desplazamiento vertical  $v$  de sus secciones. En este caso, en cada sección aparece un momento flector que ha de compensar el par que produce la reacción vertical y que es, de acuerdo a la figura y el criterio de signos que hemos adoptado,

$$M = -Pv(x). \quad (1)$$

En esta ecuación se aprecia que el flector no es una función únicamente de las cargas exteriores y de la geometría de la estructura sino que depende de la solución misma. Esta dependencia es la raíz de la no linealidad del problema de pandeo.

Cuando la ley de momentos flectores en la viga es la indicada por la ecuación (1), la elástica tiene

por expresión

$$v''(x) + \frac{P}{EI}v(x) = 0, \quad (2)$$

siendo  $EI$  la rigidez a flexión de la sección, supuesta constante.

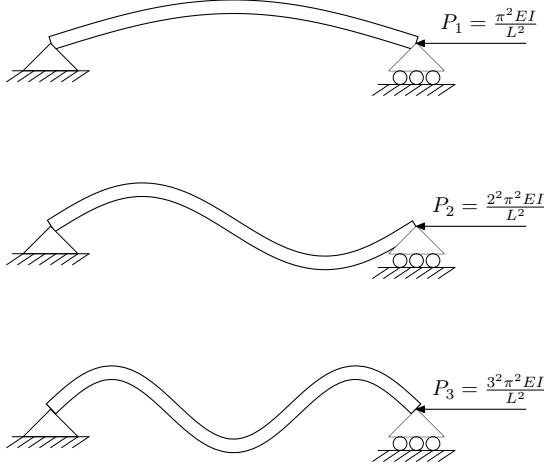


Figura 3: Los tres primeros modos de pandeo de la viga biapoyada y sus cargas de pandeo correspondientes.

Una solución a la ecuación (2) es la función  $v(x) = 0$ . Esta es la *solución trivial*, que obtenemos con el modelo de vigas sometidas a esfuerzo normal. Pero, además de esta solución, existen otras. Un sencillo análisis de autovalores permite afirmar que existen *infinitas* soluciones a esta ecuación diferencial, todas ellas satisfaciendo  $v(0) = v(L) = 0$ , de la forma

$$v(x) = A \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right), \quad P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}, \quad (3)$$

con  $n = 1, 2, \dots$ . Cada pareja de estos términos incluye el  $n$ -ésimo modo y carga de pandeo de la viga biapoyada (ver la figura 3). La menor de las cargas de pandeo, de valor

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (4)$$

es la **carga crítica de pandeo** o **carga de Euler**.

El estudio anterior permite concluir que una viga biapoyada sometida a compresión puede deformarse de infinitas maneras, además de la manera trivial. En realidad sólo se observa de forma natural el primer modo de pandeo, observándose los modos siguientes únicamente en experimentos muy cuidadosos.

El primer modo de pandeo, o modo fundamental, tiene una forma senoidal, aunque el análisis de Euler no permite conocer su amplitud. Puesto que en

los apoyos el momento flector es nulo, la curvatura del modo de pandeo también lo es.

### 3. Vigas con otras sustentaciones

El análisis de Euler sólo da la carga de pandeo (y el modo) para la viga biapoyada. Para una viga cualquiera existe un método general, aunque más laborioso para encontrar ambos. De forma más rápida se puede aprovechar las características del modo de pandeo obtenido para deducir la carga de pandeo de vigas con otras sustentaciones.

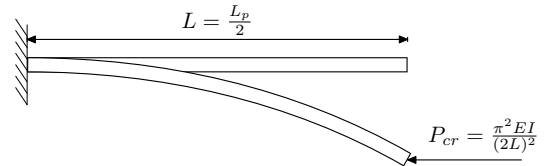


Figura 4: Modo de pandeo de una viga empotrada-libre.

Así por ejemplo, una viga empotrada pandeará como indica la figura 4. El momento flector en el extremo libre es nulo, así que la curvatura del modo de pandeo deberá ser nula en dicho punto; además, por la condición de empotramiento el giro es nulo en dicha sección y se puede identificar que el modo de pandeo para esta viga debe de ser el mismo que el de media viga apoyada. Por tanto la carga crítica de una viga empotrada-libre será la misma que la de una viga biapoyada de longitud  $L_p = 2L$ . Basta sustituir este valor en la fórmula de Euler para deducir que la carga de pandeo de la viga empotrada es

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}. \quad (5)$$

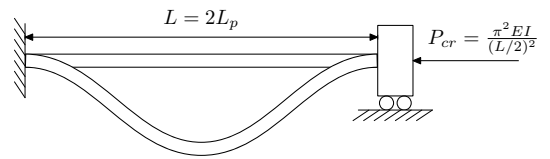


Figura 5: Modo de pandeo de una viga empotrada-empotrada.

De la misma manera, una viga bi-empotrada, con uno de los dos empotramientos fijos y el otro móvil, tal y como se dibuja en la figura 5 tiene un longitud aparente de empotramiento  $L_p p = L/2$ , pues si se observa la simetría y puntos de inflexión del modo de pandeo se puede suponer que estos últimos están a una distancia  $L/4$  de cada extremo. De hecho esta observación es rigurosamente cierta como se puede

demostrar de manera exacta. Aceptando este dato como válido se sigue que la carga de pandeo es, para la viga empotrada-empotrada

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}. \quad (6)$$

De esta manera se puede encontrar las cargas críticas de pandeo de vigas con otros apoyos. Por ejemplo, la viga empotrada-apoyada tiene una longitud aparente de pandeo  $L_p \approx 0,7L$  y por tanto su carga crítica es

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0,7L)^2}. \quad (7)$$

Lo que se observa en todos los casos es que cuanto “más sujeta” esté una viga, más alta será su carga crítica de pandeo.

#### 4. Esbeltez mecánica

Cualquier viga de las estudiadas en la sección 2 tiene una carga crítica de pandeo de la forma

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_p^2}, \quad (8)$$

siendo  $L_p$  la longitud equivalente de pandeo, que depende como se analizó de la longitud real y de los apoyos.

El momento de inercia respecto de un eje se puede expresar como  $I = Ai^2$ , donde  $i$  es el radio de giro alrededor de dicho eje. Usando esta definición, la ecuación (8) se puede reescribir como

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EA}{(L_p/i)^2} = \frac{\pi^2 EA}{\lambda^2} \quad (9)$$

y  $\lambda = L_p/i$ , un parámetro adimensional, es la **esbeltez** de la viga respecto de un eje.

La esbeltez es un concepto que permite comparar la tendencia a pandear de una viga en relación a dos sustentaciones diferentes. Cualquier viga, de hecho, al someterse a una fuerza de compresión, puede pandear en dos planos. Si asociamos al eje de la viga con la dirección  $x$  y los ejes principales de la sección con las direcciones  $y$  y  $z$ , una viga viga puede pandear en los planos  $xy$  o  $xz$ , o lo que es lo mismo, con sus secciones girando alrededor del eje  $z$  o del  $y$ . En cada una de estos dos casos los apoyos pueden ser distintos, con lo que la viga tendrá

una esbeltez para cada situación que denominamos, respectivamente,  $\lambda_z, \lambda_y$ . La carga crítica de pandeo de la viga será la menor de las cargas de pandeo en cada dirección, es decir,

$$P_{cr} = \min\left(\frac{\pi^2 EA}{\lambda_z^2}, \frac{\pi^2 EA}{\lambda_y^2}\right) = \frac{\pi^2 EA}{\max(\lambda_z^2, \lambda_y^2)}, \quad (10)$$

y definiendo la esbeltez de la viga como

$$\lambda = \max(\lambda_z, \lambda_y) \quad (11)$$

se concluye que la carga crítica de una viga, considerando sus dos posibles planos de pandeo, es

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EA}{\lambda^2}. \quad (12)$$

#### 5. Limitaciones de la teoría de Euler

La validez de la teoría de pandeo de viga desarrollada depende de que sus hipótesis de partida sean válidas. En particular, todas las expresiones halladas emplean de manera explícita o implícita que la respuesta de la viga es siempre lineal hasta la carga crítica. A partir de la expresión (12) podemos deducir que las tensiones de compresión en una viga en el instante del pandeo son

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (13)$$

Para que la hipótesis de respuesta elástica sea válida habrá que comprobar que  $\sigma_{cr} \leq \sigma_e$ , siendo  $\sigma_e$  el límite elástico del material. De hecho, esta condición muchas veces no se cumple, siendo condición necesaria que la esbeltez verifique

$$\lambda \geq \lambda_E = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_e}}, \quad (14)$$

donde  $\lambda_E$  se llama la **esbeltez de Euler**. Esta esbeltez depende del ratio  $E/\sigma_e$  y, por tanto, de cada material, definiendo una esbeltez mínima por debajo de la cual no se puede aplicar la teoría de Euler. Algunas vigas o columnas con valores de la esbeltez menores que  $\lambda_E$  pueden pandear, pero el estudio de este tipo de inestabilidad estructural queda fuera del alcance de la teoría presentada en estos apuntes.