Esfuerzos en vigas: definición, leyes y diagramas

I. Romero

21 de septiembre de 2015

Toda región de una estructura está en equilibrio estático, es decir, que la resultante de las fuerzas que actúan sobre ésta y de los momentos respecto de cualquier punto han de ser nulos. Para que este principio fundamental se cumpla es necesario que sobre cada sección de cada viga actúen fuerzas y momentos internos que se denominan *esfuerzos*. Centrándonos en problemas planos, las fuerzas internas pueden tener cualquier dirección del plano y el momento interno ha de ser perpendicular al plano de la estructura. Si la fuerza interna sobre una sección se descompone en las componentes normal y tangencial al plano de la sección podemos definir:

- ***El esfuerzo axial o normal:*** es la componente de la fuerza interna perpendicular al plano de la sección y se indica con la letra N.
- ***El esfuerzo cortante:*** es la componente de la fuerza interna contenida en el plano de la sección y se indica con la letra T.
- ***El momento flector:*** es el nombre que recibe el momento interno de los problemas planos y se indica con la letra M. En problemas en tres dimensiones, el momento interno se puede descomponer en otros momentos.

Para encontrar el valor de los esfuerzos sobre una sección cualquiera de una estructura, se aisla una región de la misma en cuyo contorno se encuentre la sección en cuestión y se emplean las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos para hallar el valor de los esfuerzos.

El sentido de los esfuerzos. No es igual un esfuerzo axial que "sale" de la sección que otro que "entra". De la misma manera, el esfuerzo cortante puede ser de tal manera que las fuerzas internas den un par horario, o bien antihorario. Por último, los momentos internos pueden aplastar las fibras superiores o las inferiores de la sección. Para distinguir los dos casos posibles orientar cada esfuerzo, se emplean ***símbolos*** que indican gráficamente la orientación de las fuerzas y momentos internos. Estos símbolos deben de *acompañar en todo momento los valores numéricos de los esfuerzos*, para que no haya duda de cómo son éstos. En la figura 1 se dibujan los tres esfuerzos posibles en un problema plano y los sentidos de cada uno de ellos.

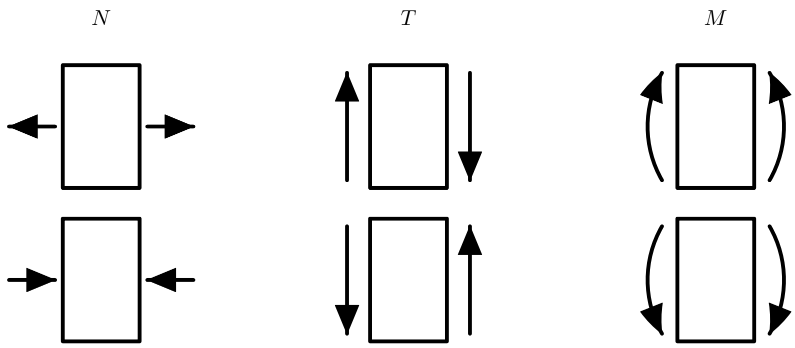

Figura 1: Los tres esfuerzos sobre una sección (normal N, cortante T y flector M) y sus dos sentidos posibles.

Diagramas de esfuerzos. Éstos son representaciones *gráficas* que comunican *el módulo y el sentido* de todos los esfuerzos en todas las secciones de una estructura sometida a cargas de forma inequívoca. Para que cumplan su objetivo, todo diagrama debe de ir acompañado de los símbolos que indiquen la orientación de los esfuerzos en cada sección.

Leyes de esfuerzos. Son representaciones matemáticas de las fuerzas y momentos internos en un sólido prismático. Deben de proporcionar, de forma inequívoca, el valor de cada esfuerzo en todas las secciones transversales del sólido. Como son funciones matemáticas, las leyes de esfuerzo sólo se pueden definir para sólidos o partes de ellos, en los que la posición de la sección transversal esté claramente determinada por un sistema de coordenadas, que en estas notas indicaremos como X. Además, para cada uno de estos sólidos o sus partes, un diagrama de signos ha de describir qué se entiende por esfuerzos positivos y negativos.

A menudo las leyes de esfuerzos no se pueden expresar matemáticamente con una función diferenciable, sino que es necesario emplear funciones definidas a trozos. Para facilitar la descripción de este tipo de funciones se emplea la *función rampa*, también llamado el *corchete de Macaulay*.

El corchete de Macaulay. La función $\langle\cdot\rangle : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida como:

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \ . \end{cases} \tag{1}$$

Ejemplo 1. La ley de momentos flectores de la viga de la figura 2 se puede escribir como:

$$M(X) = \begin{cases} \frac{P}{2} X & \text{si } 0 \leq X \leq L/2 \\ \frac{P}{2}(L - X) & \text{si } l/2 \leq X \leq L \ , \end{cases} \tag{2}$$

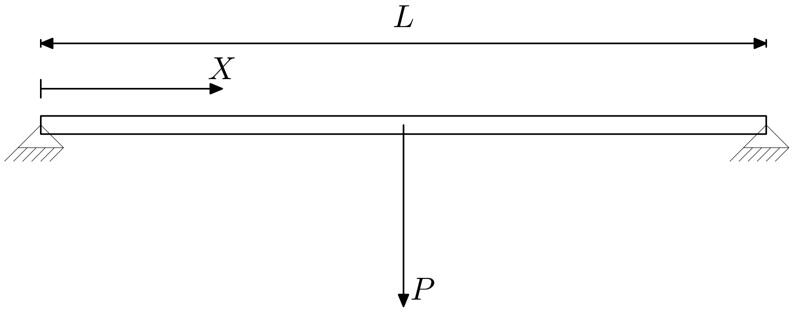

Figura 2: Ejemplo 1.

o también simplemente como

$$M(X) = \frac{P}{2}\langle X\rangle - P\langle X - L/2\rangle \ . \tag{3}$$

En esta expresión, y más abajo, se ha supuesto que el momento flector es positivo cuando está como en la línea superior de la figura 1. Aunque el signo asociado al sentido de un esfuerzo es totalmente arbitrario, es necesario declarar como positivo o negativo el considerado *cuando éste se desea expresar analíticamente.*

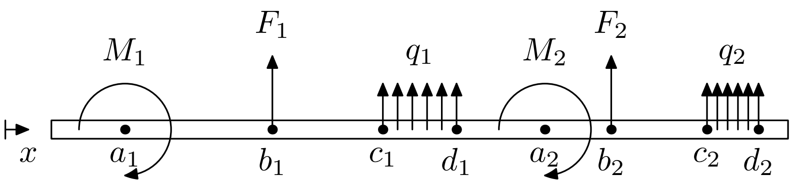

Figura 3: Carga general sobre una viga recta

Expresión general de las leyes de cortantes y momentos en un tramo de viga. Consideremos finalmente el caso general de una viga recta sometida a N_p cargas puntuales, N_m momentos concentrados y N_q cargas distribuidas constantes y perpendiculares a la generatriz tal y como aparece en la figura 3. En este caso las leyes de cortantes y momentos en cualquier punto de la viga se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{i=1}^{N_p} P_i\langle x - b_i\rangle^0 + \sum_{i=1}^{N_q} q_i(\langle x - c_i\rangle - \langle x - d_i\rangle) \\ M(x) &= \sum_{i=1}^{N_m} M_i\langle x - a_i\rangle^0 + \sum_{i=1}^{N_p} P_i\langle x - b_i\rangle^1 + \sum_{i=1}^{N_q} \frac{q_i}{2}(\langle x - c_i\rangle^2 - \langle x - d_i\rangle^2), \end{aligned} \tag{4}$$

si aceptamos que $\langle 0 \rangle^0 = 0$. Para que los signos de estas expresiones sean correctos es necesario que las cargas estén colocadas en el sentido indicado en la figura 3.

Reglas para dibujar diagramas de esfuerzos. La interpretación de las expresiones (4) permiten enunciar algunas "reglas" que ayudan a dibujar diagramas de esfuerzos sin apenas cálculos. Para los diagramas de esfuerzos cortantes:

- Los momentos concentrados no tienen ningún efecto en ellos.
- Cada fuerza concentrada P_i produce un "salto" en el diagrama hacia arriba de ese tamaño (si la fuerza es hacia abajo, el salto será también en esa dirección).
- Una fuerza distribuida q_i produce un *cambio* de pendiente en el cortante de valor igual a $|q_i|$ y de sentido igual al de la fuerza.

Si construimos los diagramas de izquierda a derecha, para los diagramas de momentos flectores:

- Un momento concentrado M_i como el de la figura produce un "salto" del diagrama de valor $|M_i|$ hacia arriba, si el momento es como el de la figura 3 y hacia abajo si el momento es el opuesto.
- Cada fuerzas concentrada P_i produce un incremento en la pendiente del diagrama. Si la fuerza es como en la figura 3, el incremento es anti-horario, y horario en el caso contrario.
- Una fuerza distribuida q_i produce un incremento en la curvatura del diagrama de momentos flectores. Si q_i es hacia arriba, el diagrama de flectores "se curva hacia arriba" y viceversa.