El método de multiplicación de áreas

I. Romero
Dpto. Ingeniería Mecánica, ETSI Industriales, UPM

18 de noviembre de 2016

Al resolver problemas de Resistencia de Materiales mediante el método de la carga unidad aparecen integrales de la forma

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

siendo, típicamente, f el esfuerzo real de una viga, dividido por la rigidez de la sección, y g el correspondiente esfuerzo conjugado debido a una carga (o par) unitario. Por ejemplo, en el caso de una viga sometida a flexión M y esfuerzo normal N, si al aplicar la carga unidad de prueba aparece un flector m y un esfuerzo normal n, el desplazamiento conjugado a la carga unidad es

$$\delta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{EI}\, M(x)\, m(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{EA}\, N(x)\, n(x)\,\mathrm{d}x\ . \tag{2}$$

Cuando los esfuerzos son funciones definidas a trozos la evaluación de integrales como la de la expresión anterior es laboriosa y existe un método, conocido como el método de *multiplicación de áreas*, que permite evaluarlas de manera bastante rápida.

El método se basa en la siguiente propiedad. Sea f una función afín y g una función cualquiera, ambas definidas en el intervalo $[\alpha, \beta]$ y positivas. Si A es el área bajo g y x_G la posición del centro de gravedad del área bajo g, es decir,

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,\mathrm{d}x\ , \qquad x_G = \frac{1}{A}\int_{\alpha}^{\beta} x\, g(x)\,\mathrm{d}x\ , \tag{3}$$

entonces la integral I se puede calcular como

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = A\, f(x_G)\ . \tag{4}$$

Demostración. Sea f de la forma

$$f(x) = a + bx\ . \tag{5}$$

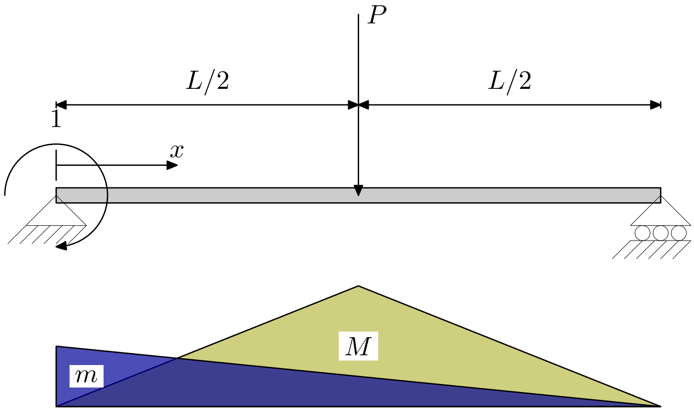

Figura 1: Ejemplo 1.

Entonces

$$I = \int_\alpha^\beta (a + bx)\ g(x)\,\mathrm{d}x = a \int_\alpha^\beta g(x)\,\mathrm{d}x + b \int_\alpha^\beta x\ g(x)\,\mathrm{d}x\ . \tag{6}$$

Según las definiciones (3), la integral I también se puede escribir como

$$I = a\,A + b\,A\,x_G\ . \tag{7}$$

Finalmente, sacando factor común A en esta última expresión se obtiene

$$I = A(a + bx_G) = Af(x_G)\ . \tag{8}$$

Ejemplo 1. Para calcular el giro en un apoyo de una viga biapoyada, de longitud L, y sometida a una carga P en el centro de vano, el momento flector M y el momento flector m debido a un par unitario en el extremo se dibujan en la figura 1 y tienen expresiones:

$$M(x) = \frac{P}{2}x - P\langle x - \frac{L}{2}\rangle\ , \qquad m(x) = 1 - \frac{x}{L}\ , \tag{9}$$

siendo $\langle\cdot\rangle$ el corchete de Macaulay. Usando el método de la carga unidad se deduce que el giro en el apoyo es

$$\begin{aligned}\theta &= \int_0^L \frac{1}{EI} M(x)\ m(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{EI}\int_0^{L/2} \frac{P}{2}x\ (1 - \frac{x}{L})\,\mathrm{d}x + \frac{1}{EI}\int_{L/2}^{L} \frac{P}{2}(L - x)\ (1 - \frac{x}{L})\,\mathrm{d}x\ .\end{aligned} \tag{10}$$

Empleando el método de multiplicación de gráficos para esta integral, y tomando $f = m$ y $g = M$, se verifica que $A = PL^2/8$, $x_G = L/2$ y por tanto

$$\theta = \frac{1}{EI}\frac{PL^2}{8}(1 - \frac{L/2}{L}) = \frac{PL^2}{16\,EI}\ . \tag{11}$$