Propiedades de superficies planas

I. Romero
Dpto. Ingeniería Mecánica, ETSI Industriales, UPM

13 de noviembre de 2014

En estas notas repasamos algunas de las propiedades de las superficies planas, es decir subconjuntos acotados $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, como el de la figura 1. En general, estas figuras pueden tener agujeros y/o estar compuestas de varias partes no conectadas. Las propiedades que se presentan en estos apuntes son aquellas imprescindibles para cálculos de secciones en Resistencia de Materiales. Además de las definiciones y alguna demostración sencilla se presentarán algunos ejemplos para ilustrar los conceptos repasados.

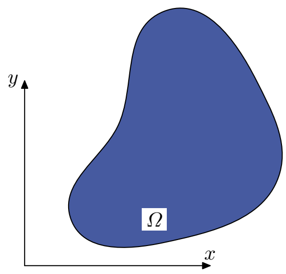

Figura 1: Una superficie plana arbitraria Ω.

Área y centro de gravedad. El área de la superficie Ω es

$$A = \int_\Omega \mathrm{d}\Omega \; . \tag{1}$$

Suponemos a continuación que (x, y) es un sistema de coordenadas cartesiano arbitrario cuyo origen puede estar en el interior o el exterior de Ω. El centro de gravedad (o centro de masa) de la sección Ω es el punto (x_G, y_G) de coordenadas

$$x_G = \frac{1}{A}\int_\Omega x \,\mathrm{d}\Omega \; , \qquad y_G = \frac{1}{A}\int_\Omega y \,\mathrm{d}\Omega \; . \tag{2}$$

El nombre de *centro de gravedad* o *de masa* pueden dar lugar a confusión porque en ningún momento se ha supuesto que la superficie tenga masa ni densidad. El nombre correcto debiera de ser *centro de área*, pero seguiremos empleando el primero por estar su uso extendido. (Nota: es necesario demostrar que las coordenadas del centro de masa no dependen del sistema de coordenadas escogido.)

Momentos de área. Para una sección cualquiera Ω y un sistema cartesiano de coordenadas (x, y) como el de la figura 1 se definen ***los momentos de área de orden k alrededor de los ejes x e y*** de la sección Ω respectivamente como

$$m_x^{(k)}(\Omega) = \int_\Omega y^k \, \mathrm{d}\Omega \ , \qquad m_y^{(k)}(\Omega) = \int_\Omega x^k \, \mathrm{d}\Omega \ . \tag{3}$$

Los momentos de orden 1 se conocen como los ***momentos estáticos*** de la sección y escribimos simplemente

$$m_x(\Omega) = \int_\Omega y \, \mathrm{d}\Omega \ , \qquad m_y(\Omega) = \int_\Omega x \, \mathrm{d}\Omega \ . \tag{4}$$

Estos momentos tienen la propiedad de que si el sistema de coordenadas (x, y) tiene el origen en el centro de masa (es decir $(x_G, y_G) = (0, 0)$) entonces

$$m_x(\Omega) = m_y(\Omega) = 0 \ . \tag{5}$$

De hecho, el centro de masa es el único punto que tiene esa propiedad. Para calcular los momentos estáticos respecto de un sistema cualquiera se utiliza, además de la definición, la siguiente propiedad:

$$m_x(\Omega) = A \, y_G \ , \qquad m_y(\Omega) = A \, x_G \ , \tag{6}$$

cuya demostración es inmediata a partir de la definición (2) de las coordenadas del centro de masa.

Los momentos de orden 2 se conocen como los ***momentos de inercia*** de la sección y escribimos

$$I_x(\Omega) = m_x^{(2)}(\Omega) \ , \qquad I_y(\Omega) = m_y^{(2)}(\Omega) \ . \tag{7}$$

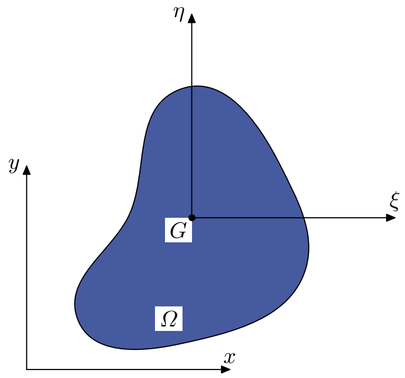

Figura 2: Una superficie plana arbitraria Ω y dos sistemas de referencia cartesianos. El sistema (ξ, η) tiene su origen en el centro de masa de la sección.

Teorema de Steiner. Supongamos ahora que, para una figura plana como la considerada anteriormente, se emplean dos sistemas de coordenadas (x, y) y (ξ, η) *paralelos* y tal que el origen del segundo coincida con el centro de gravedad de la sección (véase la figura 2). El teorema de Steiner establece que

$$I_x(\Omega) = I_\xi(\Omega) + A\, d_x^2\ , \qquad I_y(\Omega) = I_\eta(\Omega) + A\, d_y^2\ , \tag{8}$$

siendo d_x la distancia entre los ejes x y ξ y d_y la distancia entre los ejes y y η. La demostración de este teorema es muy sencilla. Considerando únicamente el primero de los resultados

$$I_x(\Omega) = \int_\Omega y^2 \,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega (\eta + d_y)^2 \,\mathrm{d}\Omega = I_\xi(\Omega) + A\, d_y^2 + 2d_y \int_\Omega \eta \,\mathrm{d}\Omega\ ,$$

pero la última integral se anula pues, por hipótesis, el eje ξ pasa por el centro de gravedad de la sección.

Ejes principales de inercia. Si (x, y) es un sistema de ejes cartesiano, se define el producto de inercia I_{xy} mediante la integral

$$I_{xy}(\Omega) = \int_\Omega xy \,\mathrm{d}\Omega\ , \tag{9}$$

siendo, obviamente $I_{xy} = I_{yx}$. Los momentos y productos de inercia son las componentes del llamado ***tensor de inercia*** $\boldsymbol{I}$. Para un sistema de coordenadas (x, y) escribimos que la expresión matricial del tensor de inercia en ese sistema de coordenadas es:

$$[\boldsymbol{I}]_{xy} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{yx} & I_{yy} \end{pmatrix}\ . \tag{10}$$

El tensor de inercia es un objeto intrínseco de la sección, pero sus componentes cambian si escogemos otro sistema de coordenadas. Es decir, si (x', y') es un segundo sistema de coordenadas,

$$[\boldsymbol{I}]_{x'y'} = \begin{pmatrix} I_{x'x'} & I_{x'y'} \\ I_{y'x'} & I_{y'y'} \end{pmatrix}\ . \tag{11}$$

Existe al menos un sistema de coordenadas en el que la matrix asociada al tensor $\boldsymbol{I}$ es diagonal. Se dice que los ejes de este sistema son ***principales de inercia*** y coinciden con los autovectores de $\boldsymbol{I}$. Además, los momentos de inercia en este sistema son los autovalores de $\boldsymbol{I}$.

Momento polar de inercia. Dado un sistema cartesiano de coordenadas (x, y), se define el momento polar de inercia respecto del origen de este sistema como

$$I_o(\Omega) = \int_\Omega (x^2 + y^2) \,\mathrm{d}\Omega = I_x(\Omega) + I_y(\Omega)\ . \tag{12}$$

Módulos resistentes a flexión. El concepto de módulo resistente está asociado a un modelo mecánico y éste en particular a la ley de Navier que expresa la linealidad de las tensiones normales en una sección sometida a flexión, donde la proporcionalidad está en función de la distancia a unos ejes (principales) que pasan por el centro de masa de la sección. Se define por tanto,

$$W_x = \frac{I_x}{|y|_{\text{máx}}} \ , \qquad W_y = \frac{I_y}{|x|_{\text{máx}}} \ . \tag{13}$$

Nótese que en estas definiciones se emplea el máximo del valor absoluto y no el valor absoluto del máximo.

Cálculo de momentos de secciones a partir de subconjuntos simples. Todos los momentos de área se obtienen a partir de integrales extendidas a Ω. Como la integral es una operación extensiva, éstos se pueden calcular sumando las contribuciones de cada una de los subconjuntos que definen una partición de la sección.

Por ejemplo, para calcular los momentos de inercia del perfil en I de la figura 3 se pueden sumar las contribuciones de cada uno de las regiones rectangulares de la I. Para ello es necesario conocer, en primer lugar, la posición del centro de masa de la sección. Este punto debe de estar, por simetría, en el eje de simetría de la figura. Además, llamando y a la distancia desde el extremo inferior de la figura,

$$y_g = \frac{2 \cdot 12 \cdot 1 + 9 \cdot 1 \cdot 6{,}5 + 1 \cdot 8 \cdot 11{,}5}{2 \cdot 12 + 9 \cdot 1 + 1 \cdot 8} = 4{,}25 \text{ cm}^2$$

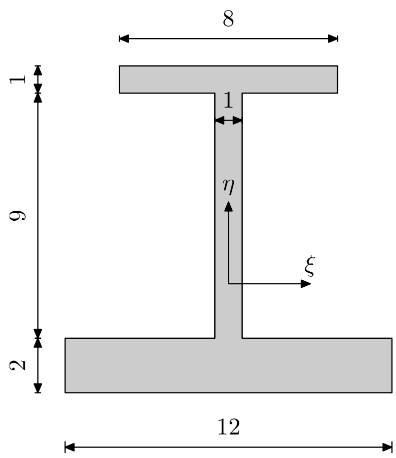

Figura 3: Perfil en I. Cotas en cm.

Sabiendo que la inercia de un rectángulo es $I = \frac{1}{12}bh^3$, la inercia de la sección en I respecto del eje ξ es

$$\begin{aligned} I_\xi =& \frac{1}{12} 12 \cdot 2^3 + 12 \cdot 2 \cdot (1 - 4{,}25)^2 + \frac{1}{12} 1 \cdot 9^3 + 1 \cdot 9 \cdot (6{,}5 - 4{,}25)^2 \\ &+ \frac{1}{12} 8 \cdot 1^3 + 8 \cdot 1 \cdot (11{,}5 - 4{,}25)^2 = 788 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

De manera análoga, la inercia respecto al eje η es

$$I_\eta = \frac{1}{12} 1 \cdot 8^3 + \frac{1}{12} 2 \cdot 12^3 + \frac{1}{12} 9 \cdot 1^3 = 331 \text{ cm}^4$$

Los módulos resistentes a flexión del perfil son

$$W_\xi = \frac{I_\xi}{|\eta|_{\text{máx}}} = \frac{788}{12 - 4{,}25} = 101,8 \text{ cm}^3 \ , \qquad W_\eta = \frac{I_\eta}{|\xi|_{\text{máx}}} = \frac{331}{6} = 55 \text{ cm}^3.$$